

Relativité Générale

Prof. Hervé Kunz

Institut de Théorie des Phénomènes Physiques

Faculté des Sciences de Base, Physique
CH-1015 Lausanne

Septembre 2007

itp.epfl.ch (Courses)

Questions, remarques : rico.rueedi@epfl.ch.

Table des matières

1	Relativité restreinte	5
1.1	Le principe de relativité d'Einstein	5
1.2	Cinématique relativiste	6
1.2.1	Invariant fondamental	6
1.2.2	Les transformations de Lorentz	8
1.2.3	L'effet Doppler	12
1.3	Dynamique de la particule libre	13
1.4	Electrodynamique	17
1.5	Tenseur d'impulsion-énergie	20
1.5.1	Electromagnétisme	21
1.5.2	Particules	22
1.5.3	Particules en interaction avec un champ électro- magnétique	23
1.5.4	Fluide parfait	23
2	Géométrie différentielle	25
2.1	Hypersurfaces. Variétés	26
2.2	Géodésiques	29
2.3	Transport parallèle. Dérivée covariante	32
2.4	Tenseur de courbure	37
2.5	Interprétation du tenseur de courbure	39
2.6	Géométrie d'une surface à deux dimensions	40
2.6.1	Notions de courbure	40
2.6.2	Elément de surface.	42
2.6.3	Théorème de Gauss-Bonnet.	42
2.7	Coordonnées géodésiques	43
2.8	Equation des déviations géodésiques	44
3	Relativité générale	47
3.1	La théorie d'Einstein. Les postulats de la relativité générale	47
3.2	L'équation d'Einstein	50
3.3	L'équation d'Einstein linéarisée	52

3.4	La limite newtonienne	53
3.5	Ondes gravitationnelles	54
3.6	Génération d'ondes gravitationnelles	58
3.7	La solution de Schwarzschild	61
3.8	Géodésiques dans la métrique de Schwarzschild	65
3.9	Etat lié. Précession du périhélie des planètes.	69
3.10	Déflexion et temps de retard de la lumière	70
3.11	Déplacement vers le rouge gravitationnel	75
3.12	Géométrie de l'espace-temps de Schwarzschild. Trous noirs.	77
A	Complément mathématique	83
B	Exercices	87

Chapitre 1

Relativité restreinte

1.1 Le principe de relativité d'Einstein

Un référentiel est un système de coordonnées cartésiennes, servant à mesurer la position des particules, auquel on a adjoint une horloge pour mesurer le temps. Un événement est donc décrit par un couple $(t, \mathbf{x})$ dans ce référentiel.

Il existe des référentiels dits d'*inertie* (ou galiléens) où le mouvement d'une particule ne subissant pas de force s'effectue à vitesse constante. Il y a autant de référentiels d'inertie que l'on voudra, se déplaçant l'un par rapport à l'autre à vitesse constante. Le *principe de relativité* (confirmé par l'expérience) stipule que les lois de la physique sont identiques dans tous les référentiels d'inertie.

En mécanique newtonienne, le changement de position d'une particule en interaction avec d'autres se reflète immédiatement sur les autres particules. Les interactions sont donc instantanées. Selon l'expérience, la vitesse de propagation d'une interaction doit toutefois avoir une limite supérieure. Du principe de relativité, il découle que cette vitesse maximale doit être la même dans tous les référentiels d'inertie : c'est la vitesse de propagation de la lumière dans le vide, c , indépendante de la fréquence et de la direction.

En mécanique newtonienne, l'intervalle de temps Δt et la distance Δx entre deux événements ne dépendent pas du référentiel d'inertie choisi. La notion de simultanéité de deux événements est absolue. On a donc la structure de l'espace-temps illustrée dans la figure 1.1.

De la mécanique newtonienne, il résulte que la vitesse de propagation de la lumière, mesurée dans un référentiel d'inertie se mouvant

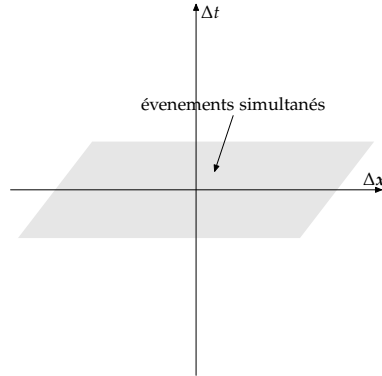


FIG. 1.1: Structure de l'espace-temps en mécanique newtonienne.

à une vitesse v par rapport à celui où l'on mesure la vitesse c , serait $c + v > c$. Ceci est en contradiction avec l'expérience de Michelson, qui a montré que la vitesse de propagation de la lumière ne dépend pas de sa direction (dans le sens de la translation de la Terre ou opposée à elle). La mécanique newtonienne est donc incompatible avec le principe de relativité. Une théorie compatible avec celui-ci entraînera une révision complète de la notion de temps et, en particulier, de la simultanéité.

1.2 Cinématique relativiste

1.2.1 Invariant fondamental

Soit un référentiel $\mathcal{K}$, et soit un référentiel $\mathcal{K}'$ se déplaçant avec une vitesse constante v' par rapport à $\mathcal{K}$. On considère deux événements séparés par un intervalle de temps Δt et par un intervalle d'espace Δx dans le référentiel $\mathcal{K}$, et par $\Delta t'$ et $\Delta x'$ dans $\mathcal{K}'$. Nous allons montrer que le principe de relativité d'Einstein se traduit par l'identité

$$\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 = \Delta s'^2 = c^2 \Delta t'^2 - \Delta x'^2. \quad (1.1)$$

Supposons que le premier événement est l'émission d'un signal lumineux qui se propage à la vitesse c , et le second la réception de ce signal. Alors $\Delta s^2 = 0$ et $\Delta s'^2 = 0$, en vertu de l'indépendance de c par rapport au référentiel d'inertie. Si $(\Delta t, \Delta x)$ et $(\Delta t', \Delta x')$ sont infiniment petits on doit avoir

$$\Delta s^2 = \alpha \Delta s'^2. \quad (1.2)$$

Le coefficient α ne peut pas dépendre des couples (t, x) et (t', x') , car alors différents points de l'espace-temps ne seraient pas équivalents (homogénéité de l'espace-temps), donc $\alpha = \alpha(v')$. Mais alors supposons que l'on fasse la mesure dans un troisième référentiel d'inertie $\mathcal{K}''$, animé d'une vitesse v'' par rapport à $\mathcal{K}$; alors

$$\Delta s^2 = \alpha(v') \Delta s'^2 \quad (1.3)$$

$$\Delta s^2 = \alpha(v'') \Delta s''^2 \quad (1.4)$$

$$\Delta s'^2 = \alpha(v'' - v') \Delta s''^2, \quad (1.5)$$

d'où

$$\frac{\alpha(v'')}{\alpha(v')} = \alpha(v'' - v'), \quad (1.6)$$

donc $\alpha(0) = 1$. Par isotropie de l'espace-temps, on a $\alpha(v') = \alpha(-v')$. Ainsi $\alpha(2v'') = 1$ et donc $\alpha(v') = 1$. L'égalité des infiniment petits entraîne celle des intervalles finis.

Ce principe a les conséquences importantes suivantes

- **Simultanéité.**

Existe-t-il un référentiel d'inertie $\mathcal{K}'$ dans lequel les deux événements sont simultanés? Oui, si

$$\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 = -\Delta x'^2 < 0. \quad (1.7)$$

La région $c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 < 0$ définit l'extérieur d'un cône dans l'espace-temps. Le cône $c^2 \Delta t^2 = \Delta x^2$ est appelé *cône de lumière* C , car sur ce cône se propagent les rayons lumineux (Fig.1.2).

Contrairement au cas Newtonien, l'ensemble des événements simultanés n'a plus la dimension de l'espace, mais celle de l'espace-temps. On dit que l'on est à l'extérieur du cône si les deux événements sont séparés par un *intervalle du genre espace* (du type $\Delta s = \pm |\Delta x'|$), car ils ont comme particularité que $\Delta t' = 0$. C'est donc une notion absolue. La notion de simultanéité ne peut donc être définie que pour de tels événements.

- **Coïncidence spatiale.**

Existe-t-il un référentiel d'inertie $\mathcal{K}'$ dans lequel les deux événements coïncident spatialement? Oui, si

$$\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 = c^2 \Delta t'^2 > 0. \quad (1.8)$$

Cette fois, la région décrite correspond à l'intérieur du cône de lumière. De tels événements sont séparés par un *intervalle du*

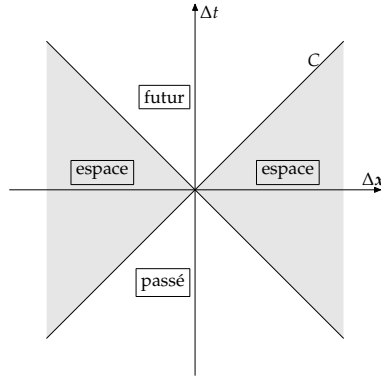


FIG. 1.2: Le cône de lumière C . L'extérieur du cône correspond aux événements séparés par un intervalle du genre espace; l'intérieur aux événements séparés par un intervalle du genre temps. De plus, l'intérieur supérieur décrit le futur absolu; l'intérieur inférieur le passé absolu.

genre temps $\Delta s = \pm c\Delta t'$. Notons que si $\Delta t > 0$, l'événement 2 a lieu après l'événement 1, tandis que si $\Delta t < 0$, il a lieu avant. De tels événements ne peuvent être simultanés dans aucun référentiel, donc par continuité, si $\Delta t > 0$ alors

$$\Delta t' = \frac{1}{c} \sqrt{c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2} > 0. \quad (1.9)$$

De même, si $\Delta t < 0$, alors $\Delta t' < 0$. L'intérieur supérieur du cône de lumière ($\Delta t > 0$) décrit donc le *futur absolu*, tandis que l'intérieur inférieur du cône décrit le *passé absolu*. Ces notions ne sont donc pas relatives et la causalité est préservée. Le mouvement d'une particule s'effectue toujours à l'intérieur du cône de lumière, puisque $\frac{|\Delta x|}{\Delta t} < c$, la vitesse de la lumière étant la vitesse maximale.

1.2.2 Les transformations de Lorentz

En physique newtonienne, les grandeurs Δt^2 et Δx^2 sont des invariants par rapport aux référentiels d'inertie. Elles sont invariantes

- sous les *translations* : $t \rightarrow t + t_0, x \rightarrow x + x_0$
- sous les *rotations* : $t \rightarrow t, x \rightarrow Rx$, où R est telle que $RR^t = 1$, $\det R = 1$
- par *parité* P : $t \rightarrow t, x \rightarrow -x$
- par *renversement du temps* T : $t \rightarrow -t, x \rightarrow x$

- sous une translation uniforme d'un référentiel animé d'une vitesse v (*boost*) : $t \rightarrow t, \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x} + \mathbf{v}t$.

Ces transformations linéaires forment un groupe appelé le *groupe de Galilée*, qui est le groupe qui laisse invariant les équations de Newton dans le vide.

En relativité, seules les transformations correspondant au passage à un référentiel d'inertie se mouvant avec une vitesses v seront différentes. Pour les décrire, suivant Minkovski, nous décrivons un point de l'espace-temps x par quatre coordonnées

$$x = (x^0, x^1, x^2, x^3), \quad x^0 = ct. \quad (1.10)$$

La grandeur fondamentale qui doit rester invariante par rapport au référentiel d'inertie est la *métrique*, $\eta_{\mu\nu}$, définie par

$$ds^2 = \sum_{\mu\nu} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \equiv \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (1.11)$$

$$\eta_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} \eta_{\mu}, \quad \eta_0 = 1, \eta_i = -1. \quad (1.12)$$

L'espace-temps muni de cette métrique se note $\mathbb{R}^{1,3}$. On peut montrer que les seules transformations non singulières qui laissent invariante la métrique sont *linéaires*

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_{\nu'} x^{\nu'} + a^\mu, \quad (1.13)$$

et l'on doit avoir

$$\Lambda^\mu_{\mu'} \Lambda^{\nu'}_{\nu} \eta_{\mu\nu} = \eta_{\mu'\nu'}. \quad (1.14)$$

Ces transformations forment un groupe dit de Poincaré. Le cas particulier $a^\mu = 0$ correspond au groupe de Lorentz $O(1, 3)$.

La relation (1.14) veut dire que la matrice (4×4) Λ , d'éléments $\Lambda^\mu_{\nu'}$ satisfait

$$\Lambda \eta \Lambda^t = \eta. \quad (1.15)$$

La métrique permet de définir un "*produit scalaire*" entre deux vecteurs

$$(x, y) = \eta_{\mu\nu} x^\mu y^\nu, \quad (1.16)$$

et une "*norme*" (x, x) . On a bien sûr $(\Lambda x, \Lambda y) = (x, y)$. Les vecteurs pour lesquels $(x, x) > 0$ sont du genre *temps*; ils sont à l'intérieur du cône de lumière défini par $(x, x) = 0$. Les vecteurs pour lesquels $(x, x) < 0$ sont du genre *espace*; ils sont à l'extérieur du cône de lumière.

Les matrices Λ sont de déterminant ± 1 ; celles de déterminant 1 forment le sous-groupe $SO(1,3)$ de $O(1,3)$. Il existe un autre sous-groupe de $SO(1,3)$, le *groupe de Lorentz propre orthochrone* $SO^\uparrow(1,3)$, aussi noté L_+ . C'est le groupe des matrices Λ telles qu'elles envoient l'intérieur du cône de lumière positif sur lui-même, c'est-à-dire

$$(x, x) > 0 \Rightarrow (\Lambda x, \Lambda x) > 0, \quad (1.17)$$

et

$$x^0 > 0 \Rightarrow (\Lambda x)^0 > 0. \quad (1.18)$$

On montre que

$$L_+ \equiv SO^\uparrow(1,3) = \left\{ \Lambda \in SO(1,3) \mid \Lambda_0^0 > 0 \right\}. \quad (1.19)$$

On montre de plus que L_+ est simplement connexe, et que le groupe de Lorentz a quatre composantes connexes correspondant à la décomposition

$$O(1,3) = L_+ \cup PL_+ \cup TL_+ \cup PTL_+, \quad (1.20)$$

où P est la parité, et T le renversement du temps.

L_+ contient bien sûr le sous-groupe $SO(3)$ des rotations. Les matrices correspondantes sont de la forme

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & r & & \\ 0 & & & \end{bmatrix}, \quad \text{avec } r \in SO(3). \quad (1.21)$$

Ce qui est nouveau par rapport au groupe de Galilée sont les transformations qui mêlent espace et temps. Soit par exemple

$$\Lambda^1(\theta) = \begin{bmatrix} \cosh \theta & \sinh \theta & 0 & 0 \\ \sinh \theta & \cosh \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in L_+. \quad (1.22)$$

Vérifier que

$$\begin{bmatrix} \cosh \theta & \sinh \theta \\ \sinh \theta & \cosh \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cosh \theta & \sinh \theta \\ \sinh \theta & \cosh \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (1.23)$$

On montre que toute transformation $\Lambda \in L_+$ peut se décomposer en

$$\Lambda = R \Lambda^1(\theta) R', \quad (1.24)$$

ce qui est l'analogie de la décomposition d'Euler pour les rotations.

Voyons quelle est l'interprétation physique de $\Lambda^1(\theta)$

$$ct' = \cosh(\theta)ct + \sinh(\theta)x^1 \quad (1.25)$$

$$x'^1 = \sinh(\theta)ct + \cosh(\theta)x^1 \quad (1.26)$$

$$x'^2 = x^2 \quad x'^3 = x^3, \quad (1.27)$$

si $\{x'^\mu\}$ désigne l'événement dans un référentiel $\mathcal{K}'$ et $\{x^\mu\}$ l'événement dans un référentiel $\mathcal{K}$. On voit que l'origine de $\mathcal{K}'$, vue de $\mathcal{K}$, se déplace à la vitesse constante $v = -c \tanh \theta$ le long de l'axe 1. Ces transformations correspondent donc au passage à un repère inertiel de vitesse $v = -c \tanh \theta$. Notons de plus que si $|\frac{v}{c}| \ll 1$ ces formules deviennent les transformations galiléennes

$$(x')^1 = vt + x^1, \quad t' = t. \quad (1.28)$$

Comme $\Lambda^1(\theta)\Lambda^1(\theta') = \Lambda^1(\theta + \theta')$ et

$$\tanh(\theta + \theta') = \frac{\tanh \theta + \tanh \theta'}{1 + \tanh \theta \tanh \theta'}, \quad (1.29)$$

la loi de composition des vitesses dans la même direction est

$$\frac{v + v'}{1 + \frac{vv'}{c^2}}, \quad (1.30)$$

qui donne la loi habituelle si $|\frac{v}{c}|, |\frac{v'}{c}| \ll 1$.

Par contre, si les deux vitesses v et v' ne sont pas colinéaires,

$$\Lambda[v]\Lambda[v'] = R(v, v')\Lambda[w(v, v')], \quad (1.31)$$

$R(v, v')$ étant une rotation.

Examinons les conséquences physiques les plus importantes de ces transformations

1. Contraction des longueurs.

Soit dans $\mathcal{K}'$ un bâton rigide situé entre $(x^1)'_A$ et $(x^1)'_B$, donc le long de l'axe 1. La longueur l du bâton mesurée dans $\mathcal{K}$ au temps t sera reliée à la longueur l' du bâton mesurée dans $\mathcal{K}'$ par

$$l = \frac{1}{\cosh \theta} l' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} l'. \quad (1.32)$$

Le bâton apparaîtra donc plus court dans $\mathcal{K}$, au point à devenir de longueur nulle si $v = c$. Notons que puisque v^2 apparaît dans les formules, dans $\mathcal{K}'$ un bâton de $\mathcal{K}$ apparaîtra aussi plus court. Notons enfin qu'il n'y a pas contraction dans les directions perpendiculaires à v .

2. Dilatation du temps.

Soit une horloge dans $\mathcal{K}'$ située en $(x^1)'_A$. Supposons qu'elle mesure deux événements $(t', (x^1)'_A)$ et $(t' + T', (x^1)'_A)$. Alors dans le référentiel $\mathcal{K}$, l'intervalle de temps T entre les deux événements sera

$$T = \cosh(\theta)T' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}T', \quad (1.33)$$

donc $T > T'$. Une horloge qui se meut marche plus lentement. Effet réciproque à nouveau (dû à v^2). Supposons maintenant que l'horloge dans $\mathcal{K}'$ soit accélérée et que cette accélération n'affecte pas sa mesure du temps ; c'est-à-dire qu'elle soit une *horloge idéale*. Dans l'intervalle de temps $[t, t + \Delta t]$, elle peut être traitée comme un référentiel d'inertie. Alors le temps mesuré par cette horloge entre t_0 et t_1 dans le référentiel $\mathcal{K}$ sera

$$\tau = \int_{t_0}^{t_1} dt \sqrt{1 - \frac{v^2(t)}{c^2}}. \quad (1.34)$$

Ce temps est appelé le *temps propre* de l'horloge.

Vérifications expérimentales

- Un avion transportant une horloge atomique a fait le tour de la terre. Au retour, le temps marqué a été comparé à celui d'une horloge restée sur Terre. Le retard a correspondu à la formule ci-dessus.
- Les mésons traversent l'atmosphère sous forme de rayons cosmiques. Leur temps de vie propre est si court qu'ils auraient eu dix fois le temps de se désintégrer, pourtant nous les observons. Une expérience au CERN montre que si $v = 0.9994c$, la durée de vie des muons mesurée est 30 fois la durée de vie naturelle.
- Un effet paradoxal est celui des jumeaux dont l'un reste sur Terre, pendant que l'autre part dans l'espace, atteint une vitesse proche de c et revient sur Terre : il sera plus jeune que son frère. Si son mouvement avait été inertiel, ceci ne serait pas possible, mais du fait qu'il a dû accélérer pour partir et revenir, son temps propre est plus court.

1.2.3 L'effet Doppler

L'effet Doppler classique est le suivant : une source de lumière émet un pulse de lumière de longueur d'onde λ_0 tout les dt' dans son référentiel au repos. Si la source se déplace avec une vitesse radiale

u_r par rapport à un observateur au repos, les pulses qui arrivent à l'observateur seront séparés par un temps

$$\Delta t = dt' + \frac{u_r dt'}{c}. \quad (1.35)$$

La longueur d'onde émise $\lambda_0 = c dt'$; celle observée vérifie $\lambda = c \Delta t$, d'où

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} = 1 + \frac{u_r}{c}. \quad (1.36)$$

Dans le cas relativiste, pour l'observateur au repos l'intervalle séparant deux pulses sera $\Delta t / \sqrt{1 - v^2/c^2}$, v étant la vitesse de la source, non nécessairement radiale. Donc

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left[1 + \frac{u_r}{c} \right]. \quad (1.37)$$

Si $u_r \geq 0$ (soit si la source s'éloigne), on a toujours un déplacement vers le rouge. Le cas $u_r = 0$ (par exemple la source tourne autour de l'observateur) est purement relativiste et a été mesuré.

1.3 Dynamique de la particule libre

Nous allons construire la dynamique par analogie avec la dynamique newtonienne, en utilisant la formulation variationnelle de la mécanique. Si $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ est le Lagrangien d'un système, son action est définie comme

$$S(\mathbf{q}) = \int_{t_1}^{t_2} dt L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), \quad (1.38)$$

avec $\mathbf{q}(t_j) = \mathbf{q}(j)$.

Soit une fonction des t_j et des $\mathbf{q}(j)$ et une fonctionnelle de la trajectoire virtuelle $\mathbf{q}(t)$. Nous calculons sa variation lorsque $\mathbf{q} \rightarrow \mathbf{q} + \delta \mathbf{q}$ et $t_j \rightarrow t'_j = t_j + \delta t_j$, $\mathbf{q}(j) \rightarrow \mathbf{q}'(j) = \mathbf{q}'(t'_j)$.

$$\delta S = S(\mathbf{q}') - S(\mathbf{q}), \quad (1.39)$$

au plus bas ordre. Noter aussi qu'au plus bas ordre,

$$\delta \mathbf{q}(t'_j) = \mathbf{q}'(t'_j) - \mathbf{q}(t'_j) = \delta \mathbf{q}(j) - \dot{\mathbf{q}}(t_j) \delta t_j. \quad (1.40)$$

Alors, si $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \equiv L_{\dot{q}^i}$,

$$\delta S = \left[L \delta t \right]_1^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} dt \left[L_{q^i} \delta q^i + L_{\dot{q}^i} \frac{d}{dt} \delta q^i \right]. \quad (1.41)$$

Appliquant une intégration par parties sur le deuxième terme dans l'intégrale et appliquant (1.40),

$$\delta S = \left[(L - p_i \dot{q}^i) \delta t + p_i \delta q^i \right]_1^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \delta q^i \left[L_{q^i} - \frac{d}{dt} L_{\dot{q}^i} \right]. \quad (1.42)$$

Mais $L - p_i \dot{q}^i = -H$ où H est l'Hamiltonien.

La trajectoire réelle est déterminée – en prenant, pour les positions $j = 1, 2$, $\delta t_j = 0$ et $\delta q^i(j) = 0$ – par l'équation d'Euler

$$L_{q^i} - \frac{d}{dt} L_{\dot{q}^i} = 0. \quad (1.43)$$

Si maintenant nous calculons l'action d'une trajectoire réelle, le deuxième terme de (1.42) est nul et le premier nous dit que S dépend du temps final t_2 et de la position finale $q(2)$, de sorte que

$$\frac{\partial S}{\partial q^i(2)} = p_i(2) \quad \text{et} \quad \frac{\partial S}{\partial t_2} = -H. \quad (1.44)$$

Considérons le cas relativiste d'une particule libre. L'action devrait être un scalaire. De plus, la trajectoire des lignes d'univers dans $\mathbb{R}^4$ devrait être telle que sa 4-vitesse $v^\mu = \frac{dx^\mu}{dt}$ soit du type temporel

$$(v, v) = \frac{dx_\mu}{dt} \frac{dx^\mu}{dt} = \frac{ds^2}{dt^2} > 0. \quad (1.45)$$

Autrement dit, son $ds = cd\tau > 0$, où τ est le *temps propre*.

Nous postulons

$$S = \alpha \int_{t_1}^{t_2} \frac{ds}{dt} dt, \quad (1.46)$$

α étant un scalaire que nous déterminons de la manière suivante

$$\frac{ds}{dt} = c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (1.47)$$

Le lagrangien est donc

$$L = \alpha c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}; \quad (1.48)$$

dans la limite newtonienne, ceci devient

$$L = \alpha c - \frac{\alpha}{2} \frac{v^2}{c}, \quad (1.49)$$

nous choisissons donc $\alpha = -mc$, où m est la *masse au repos*. Donc

$$S = -mc \int_1^2 ds. \quad (1.50)$$

Nous devons donc calculer

$$\delta ds = \delta \sqrt{ds^2} = \frac{(d\delta x^\mu) dx_\mu}{\sqrt{ds^2}} = \frac{1}{c} \frac{dx_\mu}{d\tau} d\delta x^\mu. \quad (1.51)$$

Donc

$$\delta S = -m \int_1^2 (d\delta x^\mu) \frac{dx_\mu}{d\tau} = -m \left. \frac{dx_\mu}{d\tau} \delta x^\mu \right|_1^2 + m \int_1^2 \delta x^\mu d\left(\frac{dx_\mu}{d\tau}\right). \quad (1.52)$$

La trajectoire réelle est donnée par l'équation

$$m \frac{d}{d\tau} \left(\frac{dx_\mu}{d\tau} \right) = 0, \quad (1.53)$$

et la dérivée de l'action par rapport à x^μ , pour une trajectoire réelle, sera, par analogie, définie comme

$$p_\mu = \frac{\partial S}{\partial x^\mu}, \quad (1.54)$$

donc

$$\boxed{p_\mu = -m \frac{dx_\mu}{d\tau}} \quad (1.55)$$

de sorte que l'équation du mouvement s'écrive

$$\frac{d}{d\tau} p_\mu = 0. \quad (1.56)$$

$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$ définit la 4-vitesse propre, $p_\mu = -mu_\mu$. Nous voyons donc que

$$\boxed{p^i = mu^i = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} v^i} \quad (1.57)$$

qui donne le résultat habituel dans la limite $\frac{v}{c} \rightarrow 0$.

On peut interpréter le résultat en disant que $p^i = m(v)v^i$, où

$$m(v) = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (1.58)$$

est une masse dépendant de la vitesse, m étant la *masse au repos*. Nous l'appellerons toutefois masse m . Par ailleurs

$$p^0 = p_0 = -\frac{H}{c}, \quad (1.59)$$

mais $u^\mu u_\mu = c^2$, donc $p^\mu p_\mu = m^2 c^2$, doù

$$H = mc^2 \sqrt{1 + \frac{\mathbf{p}^2}{m^2 c^2}}, \quad (1.60)$$

ayant imposé la condition $H \geq 0$. On trouve donc le fameux résultat (quand $\mathbf{v} = 0$) donnant l'énergie au repos de la particule

$$\boxed{E = mc^2} \quad (1.61)$$

ainsi que la forme habituelle de l'hamiltonien

$$H = mc^2 + \frac{\mathbf{p}^2}{2m} \quad (1.62)$$

si $c \rightarrow \infty$. Les équations du mouvement nous disent donc que *la quantité de mouvement et l'énergie sont conservés*.

Considérons maintenant le cas d'une particule qui se meut à la vitesse de la lumière. Si l'on veut que son impulsion soit bien définie, il faut que $m = 0$, autrement dit que la particule soit de masse nulle. (Aucun observateur ne peut voir un photon au repos.) Pour un photon, nous aurons donc

$$p^\mu p_\mu = 0, \quad (1.63)$$

et

$$E = c|\mathbf{p}|. \quad (1.64)$$

Cependant, une onde lumineuse de fréquence ω possède un vecteur d'onde $\mathbf{k}$, avec $\omega = c|\mathbf{k}|$. Si nous suivons Planck, nous avons $E = \hbar\omega$, donc $|\mathbf{p}| = \hbar|\mathbf{k}|$, ce qui suggère $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$.

De Broglie a utilisé ce genre d'arguments pour prédire qu'à une particule de masse non nulle, d'énergie E et d'impulsion $\mathbf{p}$ est associée une onde de fréquence $\omega = \frac{E}{\hbar}$ et vecteur d'onde $\mathbf{k} = \frac{\mathbf{p}}{\hbar}$.

Utilisant l'effet Doppler relativiste, on peut "démontrer" l'hypothèse de Planck, à savoir que $\hbar$ est indépendant de l'observateur, donc une constante universelle (voir exercice).

Finalement, notons que l'action étant minimale pour la trajectoire réelle (qui est une ligne droite dans $\mathbb{R}^3$), comme $S = -mc^2\tau(2,1)$, le temps propre est maximal le long de la ligne droite (paradoxe des jumeaux).

Lorsque l'on a N particules libres, de masses $m(n)$, l'action sera

$$S = -c \sum_{n=1}^N m(n) \int_1^2 \sqrt{dx^\mu(n) dx_\mu(n)}, \quad (1.65)$$

et les sommes des quantités de mouvements et des énergies sont conservées.

$$\sum_n p_\mu(n) = \text{cte} \quad (1.66)$$

1.4 Electrodynamique

En unités CGS¹, les équations de Maxwell s'écrivent

$$(I) \quad \begin{aligned} \text{rot } \mathbf{E} + \partial_0 \mathbf{H} &= 0 \\ \text{div } \mathbf{H} &= 0 \end{aligned} \quad (1.67)$$

$$(II) \quad \begin{aligned} \text{rot } \mathbf{H} - \partial_0 \mathbf{E} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \\ \text{div } \mathbf{E} &= 4\pi \rho \end{aligned} \quad (1.68)$$

Introduisons le tenseur covariant antisymétrique du champ électromagnétique F_{ab} , défini par

$$F_{i0} = E_i \quad (1.69)$$

$$F_{ij} = \epsilon_{ijk} H_k \quad (1.70)$$

Les équations de Maxwell s'écrivent alors

$$(I) \quad \partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma F_{\alpha\beta} = 0 \quad (1.71)$$

$$(II) \quad \partial^\alpha F_{\alpha\beta} = -4\pi J_\beta, \quad (1.72)$$

où J est le 4-courant défini par $J_0 = \rho$, $J_i = \frac{-j_i}{c}$ et $\partial^\alpha = \eta_\alpha \partial_\alpha$. Dans le langage des formes, où $F = \frac{1}{2} F_{\alpha\beta} dx^\alpha \wedge dx^\beta$, les équations de Maxwell deviennent

$$(I) \quad dF = 0 \quad (1.73)$$

$$(II) \quad d * F = 4\pi * J \quad (1.74)$$

(1.73) se résout dans un domaine étoilé de $\mathbb{R}^4$ en introduisant un champ de jauge A qui est une 1-forme, $A = A_\alpha dx^\alpha$, par $F = dA$ ou $F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha$. Comme $d^2 = 0$ on a

$$(III) \quad d * J = 0, \quad (1.75)$$

qui est l'équation de continuité $\partial^\beta J_\beta = 0$.

¹CGS : Centimètre, Gramme, Seconde

²Notation contractée de $\partial^\alpha = \eta^{\alpha\beta} \partial_\beta = \eta_\alpha \delta_{\alpha\beta} \partial_\beta$ avec η_α défini selon (1.12)

En changeant de référentiel par une transformation de Lorentz, le champ devient

$$F'_{\alpha'\beta'}(x') = \Lambda_{\alpha'}^{\alpha} \Lambda_{\beta'}^{\beta} F_{\alpha\beta}(x = \Lambda x'). \quad (1.76)$$

On peut voir ainsi que si dans le premier référentiel il n'y a qu'un champ électrique, c'est-à-dire $F_{ij} = 0$, dans le nouveau on observe un champ magnétique non nul (voir exercices). L'interprétation physique de cette propriété est que dans le nouveau référentiel, les charges sont en mouvement et donc induisent un champ magnétique. Par contre, il existe deux invariants

$$\frac{1}{2} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} = \mathbf{H}^2 - \mathbf{E}^2, \quad (1.77)$$

et

$$\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^* F^{\mu\nu} = \frac{1}{8} \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} F^{\alpha\beta} F^{\gamma\delta} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{H}. \quad (1.78)$$

De (1.78), il suit que si dans un référentiel $\mathbf{E} \cdot \mathbf{H} \neq 0$, il n'existera pas de référentiel où $(\mathbf{E} \neq 0, \mathbf{H} = 0)$, ou $(\mathbf{E} = 0, \mathbf{H} \neq 0)$.

Les équations de Maxwell peuvent se déduire d'un principe variationnel où les coordonnées généralisées sont le champ de jauge A_μ . Soit en effet l'action

$$S_{\text{EM}}(A) = -\frac{1}{16\pi c} \int_V F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} d\Omega + \frac{1}{c} \int_V A_\alpha J^\alpha d\Omega, \quad (1.79)$$

où $F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha$, $d\Omega = dx^0 d^3x$, $V = [t_1, t_2] \times C$, C un cube de $\mathbb{R}^3$, par exemple, J fixé. Dans le langage des formes,

$$S_{\text{EM}}(A) = -\frac{1}{8\pi c} \int_V F \wedge *F + \frac{1}{c} \int_V A \wedge *J. \quad (1.80)$$

Mais

$$d\Omega \delta \left(\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right) = \frac{d\Omega}{2} (\delta F_{\mu\nu}) F^{\mu\nu} = \delta F \wedge *F, \quad (1.81)$$

donc

$$\delta S_{\text{EM}} = -\frac{1}{4\pi c} \int_V \delta F \wedge *F + \frac{1}{c} \int_V \delta A \wedge *J. \quad (1.82)$$

Mais $\delta F = d\delta A$, donc

$$\int_V d(\delta A) \wedge *F = \int_V d(\delta A \wedge *F) + \int_V \delta A \wedge (d *F), \quad (1.83)$$

en se souvenant que pour une p -forme A

$$d(A \wedge B) = dA \wedge B + (-1)^p (A \wedge dB). \quad (1.84)$$

Par Stokes,

$$\int_V d(\delta A \wedge *F) = \int_{\partial V} \delta A \wedge *F = 0, \quad (1.85)$$

si $\delta A_\alpha(\mathbf{x}, t_2) = \delta A_\alpha(\mathbf{x}, t_1) = 0$ et $F = 0$ sur ∂V ; d'où

$$\delta S_{\text{EM}} = -\frac{1}{4\pi c} \int \delta A \wedge [d * F - 4\pi * J], \quad (1.86)$$

ce qui entraîne $d * F = 4\pi * J$.

Remarque. Le terme $\int_V A \wedge *J$ est invariant de jauge, malgré les apparences, si l'on impose $d * J = 0$, l'équation de conservation du courant. En effet, si $A = A' + d\chi$ où $\chi(\mathbf{x}, t_1) = \chi(\mathbf{x}, t_2) = 0$ et $J = 0$ sur ∂V , alors

$$\int_V d\chi \wedge *J = \int_{\partial V} \chi \wedge *J - \int_V \chi \wedge d * J = 0. \quad (1.87)$$

Considérons maintenant le cas où les champs sont fixés et le courant est dû à une particule de charge q , de coordonnées $(\mathbf{x}(t), t)$ et de masse m . Alors $\rho(\mathbf{x}, t) = q\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}(t))$, et $J^i = \rho \frac{dx^i}{cdt}$, ce qui entraîne

$$\begin{aligned} \int A_\alpha(\mathbf{x}) J^\alpha(\mathbf{x}) d\Omega &= q \int A_0(\mathbf{x}(t), x^0) dx^0 + \\ & q \int A_i(\mathbf{x}(t), x^0) dx^i = q \int A_\alpha dx^\alpha, \end{aligned} \quad (1.88)$$

et l'action sera donnée par

$$S(A, x) = S_{\text{EM}}(A) - mc \int ds. \quad (1.89)$$

Donc

$$\delta S = \frac{q}{c} \int \delta A_\alpha dx^\alpha + \frac{q}{c} \int A_\alpha d\delta x^\alpha - mc \int \delta ds, \quad (1.90)$$

mais $\delta A_\alpha = \partial_\beta A_\alpha \delta x^\beta$, et

$$\int A_\alpha d\delta x^\alpha = \delta x^\alpha A_\alpha \Big|_{t_1}^{t_2} - \int \delta x^\alpha \partial_\beta A_\alpha dx^\beta. \quad (1.91)$$

Comme nous avons

$$-mc \int \delta ds = -m \delta x^\alpha u_\alpha \Big|_{t_1}^{t_2} + m \int \delta x^\alpha du_\alpha, \quad (1.92)$$

nous obtenons

$$\begin{aligned} \delta S &= \delta x^\alpha \left[\frac{q}{c} A_\alpha - m u_\alpha \right]_{t_1}^{t_2} \\ &+ \int \delta x^\alpha \left[m \frac{du_\alpha}{d\tau} + \frac{q}{c} (\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha) u^\beta \right] d\tau, \end{aligned} \quad (1.93)$$

d'où l'équation du moment

$$\boxed{\frac{dp_\alpha}{d\tau} = -m \frac{du_\alpha}{d\tau} = \frac{q}{c} F_{\alpha\beta} u^\beta} \quad (1.94)$$

et pour la 4-impulsion, ou le 4-moment,

$$\boxed{p_\alpha = -m u_\alpha + \frac{q}{c} A_\alpha} \quad (1.95)$$

Comme $u^\alpha u_\alpha = c^2$ et $p_0 = -\frac{E}{c} = -\frac{H}{c}$, on déduit l'expression de l'hamiltonien

$$\boxed{H = -q A_0 + m c^2 \sqrt{1 + \frac{(\mathbf{p} - q \mathbf{A}/c)^2}{m^2 c^2}}} \quad (1.96)$$

qui, sous la limite $c \rightarrow \infty$, devient l'expression bien connue. Quant à l'équation du mouvement

$$m \frac{du^i}{d\tau} = \frac{q}{c} \left[F_{i0} \frac{dx^0}{d\tau} + F_{ij} \frac{dx^j}{d\tau} \right], \quad (1.97)$$

elle donne, quand $c \rightarrow \infty$ et $u^i = v^i$, $dt = d\tau$,

$$m \frac{dv}{dt} = qE + \frac{q}{c} (\mathbf{v} \wedge \mathbf{H}) \quad (1.98)$$

soit l'équation de Lorentz pour la force.

1.5 Tenseur d'impulsion-énergie

On introduit en relativité un tenseur $(0,2)$ symétrique $T_{\alpha\beta}(x)$, qui a la dimension d'une énergie par unité de volume et qui doit être tel que pour tout observateur avec une 4-vitesse propre u , de type temporel, c'est-à-dire $0 < u^\mu u_\mu \leq c^2$, la densité d'énergie mesurée par cet observateur soit positive

$$T_{\alpha\beta} \frac{u^\alpha u^\beta}{c^2} > 0. \quad (1.99)$$

T_{i0} correspond à la densité d'impulsion dans la direction i ; T_{ij} est le tenseur des tensions.

Si le système est constitué de plusieurs sources, $j = 1, \dots, N$, de tenseurs $T_{\alpha\beta}^j$, le tenseur du système sera

$$T_{\alpha\beta} = \sum_{j=1}^N T_{\alpha\beta}^j. \quad (1.100)$$

Par ailleurs, on exige que le tenseur satisfasse à une loi de conservation

$$\partial^\alpha T_{\alpha\beta} = 0, \quad (1.101)$$

quand tous les champs et toutes les particules en interaction sont pris en compte.

1.5.1 Electromagnétisme

En électromagnétisme, le tenseur d'impulsion-énergie est donné par

$$4\pi T_{\alpha\beta}^{\text{EM}} = -F_{\alpha\gamma}F_{\beta\gamma}\eta^\gamma + \frac{1}{4}\eta_{\alpha\beta}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \quad (1.102)$$

On a

$$4\pi T_{00}^{\text{EM}} = \frac{1}{2}(\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2), \quad (1.103)$$

représentant la densité d'énergie,

$$4\pi T_{i0}^{\text{EM}} = -(\mathbf{E} \wedge \mathbf{H})_i, \quad (1.104)$$

la i -ème composante du flux d'énergie, le vecteur de Poynting, et T_{ij} le tenseur des tensions du champ électromagnétique.

Examinons la loi de conservation

$$4\pi 2\partial^\alpha T_{\alpha\beta}^{\text{EM}} = -\left[\partial^\alpha (F_{\alpha\gamma}F_{\beta\gamma}\eta^\gamma) + \partial^\gamma (F_{\gamma\alpha}F_{\beta\alpha}\eta^\alpha)\right] + \frac{1}{2}\partial_\beta F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \quad (1.105)$$

Le terme entre crochets devient

$$\begin{aligned} [\dots] &= (\partial^\alpha F_{\alpha\gamma})F_{\beta\gamma}\eta^\gamma + (\partial^\gamma F_{\gamma\alpha})F_{\beta\alpha}\eta^\alpha \\ &\quad + \eta_\gamma\eta_\alpha F_{\alpha\gamma}(\partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\gamma F_{\alpha\beta}) \end{aligned} \quad (1.106)$$

$$= -8\pi F_{\beta\gamma}J^\gamma - \eta_\alpha\eta_\gamma F_{\alpha\gamma}\partial_\beta F_{\gamma\alpha}, \quad (1.107)$$

par les équations de Maxwell (1.71 et 1.72). Donc

$$[\dots] = -8\pi F_{\beta\gamma}J^\gamma + \frac{1}{2}\partial_\beta F_{\alpha\gamma}F^{\alpha\gamma}, \quad (1.108)$$

d'où

$$\partial^\alpha T_{\alpha\beta}^{\text{EM}} = F_{\beta\gamma}J^\gamma. \quad (1.109)$$

Donc sans sources ($J = 0$), il y a conservation de l'énergie-impulsion.

1.5.2 Particules

Le tenseur impulsion-énergie est donné par

$$T_{\alpha\beta}^{\text{mat}}(\mathbf{x}, t) = -p_\alpha \frac{dx_\beta}{dt} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}(t)) \quad (1.110)$$

Pour une particule de masse m , la trajectoire est

$$-p_\alpha \frac{dx_\beta}{dt} = p_\alpha \frac{d(-mx_\beta)}{d\tau m} \frac{d\tau}{dx_0} = \frac{p_\alpha p_\beta}{m} c \frac{d\tau}{dx_0}, \quad (1.111)$$

Comme

$$\int \delta(x^0 - x^0(\tau)) d\tau = \frac{d\tau}{dx^0}, \quad (1.112)$$

on peut aussi écrire T sous la forme

$$\boxed{T_{\alpha\beta}^{\text{mat}} = c \int \frac{p_\alpha p_\beta}{m} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}(\tau)) d\tau.} \quad (1.113)$$

On voit donc que T^{mat} est bien un tenseur symétrique $(0, 2)$. De plus,

$$\int T_{00}^{\text{mat}} f(x) dx > 0, \quad (1.114)$$

si $f \geq 0$, et

$$T_{i0}^{\text{mat}} = -\frac{E}{c} \frac{dx^i}{dt} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}(t)) \quad (1.115)$$

qui est le courant d'énergie. Calculons

$$\partial^\alpha T_{\alpha\beta}^{\text{mat}} = c \int p_\alpha p_\beta \partial^\alpha \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}(\tau)) d\tau \quad (1.116)$$

$$\partial^\alpha \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}(\tau)) = -\eta^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha(\tau)} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}(\tau)) \quad (1.117)$$

mais

$$p_\alpha \eta^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha(\tau)} = -m \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{\partial}{\partial x^\alpha(\tau)} = -m \frac{d}{d\tau} \quad (1.118)$$

donc

$$\frac{1}{m} \int p_\beta p_\alpha \partial^\alpha \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}(\tau)) d\tau = \int p_\beta \frac{d}{d\tau} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}(\tau)) d\tau \quad (1.119)$$

$$= \int \frac{dp_\beta}{d\tau} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}(\tau)) d\tau \quad (1.120)$$

$$= \frac{dp_\beta}{dx^0} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}(t)), \quad (1.121)$$

d'où

$$\partial^\alpha T_{\alpha\beta}^{\text{mat}} = -\frac{dp_\beta}{dt} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}(t)), \quad (1.122)$$

et $\frac{dp_\beta}{dt} = f_\beta$ est la force. Donc pour une particule libre $\partial^\alpha T_{\alpha\beta}^{\text{mat}} = 0$.

Si on a N particules de masse $m(n)$, $n = 1, \dots, N$, alors

$$T_{\alpha\beta}^{\text{mat}} = \sum_{n=1}^N T_{\alpha\beta}^{\text{mat}}(n), \quad (1.123)$$

avec

$$T_{\alpha\beta}(n)^{\text{mat}} = c \int \frac{p_\alpha(n)}{m(n)} p_\beta(n) \delta(x - x_n(\tau)) d\tau. \quad (1.124)$$

1.5.3 Particules en interaction avec un champ électromagnétique

Dans le cas de particules en interaction avec un champ électromagnétique, le tenseur impulsion-énergie du système est donné par

$$T_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta}^{\text{EM}} + T_{\alpha\beta}^{\text{mat}}, \quad (1.125)$$

le courant par

$$J^\gamma(x) = \sum_n q(n) \frac{dx^\gamma(n)}{dx^0} \delta(x - x_n(t)). \quad (1.126)$$

Alors

$$\begin{aligned} \partial^\alpha T_{\alpha\beta}^{\text{EM}} &= \sum_n q(n) F_{\beta\gamma}(x_n) u^\gamma(n) \frac{d\tau(n)}{dx^0} \delta(x - x_n(t)) \\ &= c \sum_n \frac{dp_\beta(n)}{dx^0} \delta(x - x_n(t)) = -\partial^\alpha T_{\alpha\beta}^{\text{mat}}, \end{aligned} \quad (1.127)$$

d'où la conservation du tenseur complet

$$\partial^\alpha T_{\alpha\beta} = 0. \quad (1.128)$$

1.5.4 Fluide parfait

Un fluide parfait est un fluide sans viscosité et sans transport de chaleur. En chaque point x , le fluide a une vitesse $v(x)$, telle qu'un observateur qui se meut avec cette vitesse voit le fluide comme isotrope. Ce sera le cas si le libre parcours moyen entre collisions est petit comparé à l'échelle de longueur utilisée par l'observateur.

Supposons que nous soyons dans un référentiel (1) dans lequel le fluide est au repos au point x à l'instant t (soit en x). Alors le tenseur d'impulsion-énergie sera, en vertu de l'isotropie

$$T'_{00} = \rho c^2, \quad T'_{i0} = T'_{0i} = 0, \quad T'_{ij} = p \delta_{ij}, \quad (1.129)$$

où ρ est la densité de masse et p la pression. Autrement dit,

$$T'_{\alpha'\beta'} = (\rho c^2 + p)e_{\alpha'}e_{\beta'} - p\eta_{\alpha'\beta'}, \quad (1.130)$$

si $e_\alpha = \delta_{\alpha 0}$. Allons maintenant dans un référentiel au repos dans le laboratoire et supposons que dans ce référentiel le fluide apparaît avec la vitesse $\mathbf{v}$. La relation entre les coordonnées du laboratoire x^α et celle de l'autre référentiel $x'^{\alpha'}$ sera $x^\alpha = \Lambda_{\alpha'}^\alpha(v)x'^{\alpha'}$, puisque nous voulons que T soit un tenseur, donc dans le référentiel du laboratoire on a

$$T_{\alpha\beta} = \Lambda_{\alpha'}^{\alpha'} \Lambda_{\beta'}^{\beta'} T'_{\alpha'\beta'}. \quad (1.131)$$

Mais $\Lambda_{\alpha'}^{\alpha'} \Lambda_{\beta'}^{\beta'} \eta_{\alpha'\beta'} = \eta_{\alpha\beta}$, $\Lambda_{\alpha'}^{\alpha'} \Lambda_{\beta'}^{\beta'} e_{\alpha'}e_{\beta'} = \Lambda_{\alpha}^0 \Lambda_{\beta}^0$. De plus ρ et p sont des scalaires. Donc

$$T_{\alpha\beta} = \left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) u_\alpha u_\beta - p\eta_{\alpha\beta} \quad (1.132)$$

avec $\rho = \rho(x)$, $p = p(x)$, et $u_\alpha = u_\alpha(x)$, donné par $u_\alpha = c\Lambda_{\alpha'}^0$, mais $u_0 = c\gamma$, $u_i = -\gamma v_i$, où $\gamma = (1 - \frac{v^2}{c^2})^{-1/2}$. Donc

$$u_\alpha u^\alpha = c^2 \quad (1.133)$$

et l'équation de conservation est

$$\partial^\alpha T_{\alpha\beta} = 0 \quad (1.134)$$

Multipliant cette équation par u^β et sommant sur β , on obtient

$$u^\alpha \partial_\alpha \rho + \left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) \partial_\alpha u^\alpha = 0, \quad (1.135)$$

soit

$$\partial_t \rho + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} + \left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) [\partial_t \ln \gamma + \mathbf{v} \cdot \nabla \ln \gamma] + \frac{p}{c^2} \operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (1.136)$$

Lorsque $c \rightarrow \infty$, on retrouve bien l'équation de continuité (conservation de la masse)

$$\partial_t \rho + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} = 0 \quad (1.137)$$

Remplaçons maintenant (1.135) dans (1.134); on obtient

$$\rho(u^\alpha \partial_\alpha u_\beta) + \frac{u_\alpha}{c^2} \partial^\alpha (p u_\beta) = \partial_\beta p, \quad (1.138)$$

soit

$$\begin{aligned} & \rho [\partial_\alpha (\gamma \mathbf{v}) + (\mathbf{v} \cdot \nabla) (\gamma \mathbf{v})] \\ & + \frac{1}{c^2} \partial_t (p \gamma \mathbf{v}) + \frac{1}{c^2} (\mathbf{v} \cdot \nabla) (p \gamma \mathbf{v}) = -\frac{1}{\gamma} \nabla p. \end{aligned} \quad (1.139)$$

Quand $c \rightarrow \infty$, on retrouve l'équation d'Euler

$$\rho \partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p. \quad (1.140)$$

Chapitre 2

Géométrie différentielle

Considérons la Terre : elle peut être décrite depuis l'espace (description extrinsèque) ou depuis elle-même (description intrinsèque). Dans les deux cas, en première approximation, c'est une sphère. Vue de l'espace, en coordonnées cartésiennes, elle sera décrite par

$$F(y) = \sum_{i=1}^3 (y^i - y_0^i)^2 - R^2 = 0. \quad (2.1)$$

Du point de vue de la Terre, on peut employer des cartes, c'est-à-dire des coordonnées locales $\{x^\alpha\}_{\alpha=1,2}$, à l'aide desquelles on peut situer un point. La nature des coordonnées utilisées, (θ, ϕ) ou autres, est sans réelle importance. Le même morceau est décrit par différentes cartes. Passer des coordonnées d'une carte à l'autre se fait par un changement de variables au moins C^1 . L'ensemble des cartes forme un *atlas* ; l'atlas est *complet* si quand on lui ajoute une carte, on peut la décrire par l'atlas existant.

Une description de la Terre au moyen de cartes nous permet parfaitement de décrire ses propriétés et même de déterminer son rayon. Généralisons ; nous avons un espace appelé *variété* M mis en correspondance biunivoque avec un ouvert de $\mathbb{R}^n$ appelé *carte*. (Dans notre cas, M est la Terre et $n = 2$). Nous exigeons de plus que sur M nous pouvons définir la notion de voisinage et donc de continuité ; M est alors un *espace topologique séparé*. La correspondance entre points de la carte et points de M sera donc continue et d'inverse continu. Le passage d'une carte à l'autre s'effectue par un changement de variables C^k et d'inverse C^k ($k \geq 1$).

On s'intéresse aux propriétés de M qui ne dépendent ni des coordonnées locales choisies, ni du fait que la variété est plongée dans un espace euclidien plus grand. C'est le *principe de relativité géométrique*.

2.1 Hypersurfaces. Variétés

Nous procéderons de manière inductive. Point de vue *extrinsèque* : Soit M une hypersurface de dimension n , plongée dans un espace de dimension $n + 1$

$$M = \left\{ y \in \mathbb{R}^{n+1} \mid F(y) = 0 \right\}. \quad (2.2)$$

∇F est la normale à M dans $\mathbb{R}^{n+1}$. Si $\nabla F(y) \neq 0$ en y , M est dite *régulière en y* .

Exemple. La fonction

$$F(y) = \sum_{i=1}^{n+1} (y^i)^2 - R^2 \quad (2.3)$$

définit une sphère $S^n(R)$ centrée en 0 et de rayon R . Elle est régulière en tout point. Par opposition, un cône dans $\mathbb{R}^3$ n'est pas régulier en 0.

Si M est régulière en tout point, alors M est une variété C^k différentielle si $F \in C^k$.

Localement, une carte peut être construite en résolvant l'équation $F(y) = 0$ pour exprimer une des coordonnées en fonction des autres, qui deviennent des coordonnées locales $\{x^\alpha\}$, $\alpha = 1, \dots, n$. Dans une région où deux cartes se recoupent, on passe des coordonnées x aux coordonnées x' et inversement par une transformation $x = x(x')$ et $x' = x'(x)$, C^k . L'ensemble des cartes décrit complètement M . On cherchera un atlas qui contient le nombre minimal de cartes.

Exemple. Pour S^2 , une carte possible consiste à prendre les coordonnées sphériques (θ, ϕ) . Cette carte présente cependant un problème en $\theta = \{0, \pi\}$, $\forall \phi$, puisqu'elle décrit le même pôle (nord ou sud). Ce n'est donc pas une carte appropriée dans notre cas. Par contre, les deux cartes constituant la projection stéréographique

$$\frac{y^1 + iy^2}{1 + y^3} = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\phi} = z \quad (2.4)$$

$$\frac{y^1 + iy^2}{1 - y^3} = \cotn\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\phi} = z' \quad (2.5)$$

suffisent (Fig.2.1). S^2 est une variété $C^k \forall k \geq 1$, et donc une variété différentiable.

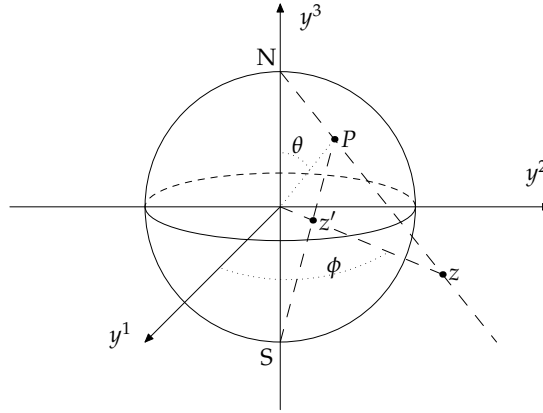


FIG. 2.1: Projection stéréographique. Les coordonnées complexes z du point P sont données par l'intersection de la droite NP avec le plan y^1y^2 . Pour pouvoir décrire le pôle nord, la deuxième carte de la projection (coordonnées z' de P) est nécessaire.

Soit c une courbe sur M , partant de $y(0) = P$. Du point de vue extrinsèque,

$$c = \left\{ y \in \mathbb{R}^{n+1} \mid F(y(t)) = 0 \right\}. \quad (2.6)$$

Le vecteur vitesse $\dot{y}(0)$ est tangent à c en $y(0) = P$. Le *plan tangent en P* sera engendré par tous les vecteurs tangents $\dot{y}(0)$ à toutes les courbes partant de P ; il sera de dimension n si M est régulière en $y(0)$.

Si $f(y(t))$ est une fonction de la courbe c ,

$$\dot{f} = \sum_{j=1}^{n+1} \frac{\partial f}{\partial y^j} \dot{y}^j = \sum_{\alpha=1}^n \dot{x}^\alpha e_\alpha(f), \quad (2.7)$$

dans une carte, où $e_\alpha(f) = \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} = e_\alpha \nabla f$, où $e_\alpha = \frac{\partial y}{\partial x^\alpha}$.

Nous pouvons définir la dérivée de f dans la direction X , de manière *intrinsèque*, par

$$\nabla_X f = \sum_{\alpha=1}^n X^\alpha \frac{\partial f}{\partial X^\alpha} = X^\alpha e_\alpha(f). \quad (2.8)$$

Le vecteur x peut être considéré comme un vecteur du plan tangent $E(x)$ au point x . Une base de cet espace sont les vecteurs $e_\alpha \in \mathbb{R}^n$, où $e_\alpha = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$, de manière intrinsèque.

$E(x)$ est un espace vectoriel de dimension n . Il possède un espace dual $E^*(x)$, le *plan cotangent en x* . On peut le décrire pour une hypersurface, en introduisant une *métrique induite* g sur M . Dans $\mathbb{R}^{n+1}$, la

distance euclidienne infinitésimale entre deux points est

$$ds^2 = \sum_{j=1}^{n+1} (dy^j)^2. \quad (2.9)$$

Elle induit une distance sur M . Dans une carte, $dy^j = (\partial_\alpha y^j) dx^\alpha$, donc

$$ds^2 = dx^\alpha dx^\beta g_{\alpha\beta}(x), \quad g_{\alpha\beta}(x) = (e_\alpha(x), e_\beta(x)). \quad (2.10)$$

L'inverse de la matrice g , d'éléments $g^{\alpha\beta}$ satisfait $g^{\alpha\gamma} g_{\gamma\beta} = \delta^\alpha_\beta$.

Soit alors

$$e^\alpha = g^{\alpha\beta} e_\beta, \quad (2.11)$$

on a $(e^\alpha, e_\beta) = \delta^\alpha_\beta$. Ces e^α définissent une forme linéaire sur $E(x)$ et constituent une base de E^* . On peut écrire $x \in E^*$ comme

$$x = \sum_{\alpha=1}^n x_\alpha e^\alpha. \quad (2.12)$$

Ceci amène du point de vue intrinsèque à se donner une métrique $g_{\alpha\beta}$ et à définir les $e^\alpha = g^{\alpha\beta} e_\beta$ ($e^\alpha = e^\alpha$). Dans un changement de cartes,

$$e_\alpha = a_\alpha^{\alpha'} e'_{\alpha'} \quad (2.13)$$

$$e^\alpha = b_{\alpha'}^\alpha e'^{\alpha'}, \quad (2.14)$$

avec

$$a_\alpha^{\alpha'} = \frac{\partial x'^{\alpha'}}{\partial x^\alpha}, \quad b_{\alpha'}^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^{\alpha'}}, \quad (2.15)$$

$b_{\alpha'}^\alpha a_\beta^{\alpha'} = \delta_\beta^\alpha$ et

$$g_{\alpha\beta} = a_\alpha^{\alpha'} a_\beta^{\beta'} g'_{\alpha'\beta'} \quad (2.16)$$

$$g^{\alpha\beta} = b_{\alpha'}^\alpha b_{\beta'}^\beta g'^{\alpha'\beta'}. \quad (2.17)$$

Considérons le cas plus général d'un tenseur (p, q) ; forme multilinéaire. Une base est constituée de

$$e_{\alpha_1} \otimes \dots \otimes e_{\alpha_p} \otimes e^{\beta_1} \otimes \dots \otimes e^{\beta_q}, \quad (2.18)$$

dont les composantes sont

$$\prod_{j=1}^p e_{\alpha_j}^{r_j} \prod_{i=1}^q e^{\beta_i s_i} \quad (2.19)$$

dans $\mathbb{R}^{n+1}$. Dans cette base, le tenseur s'écrit

$$T = \sum_{\alpha_1 \dots \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_q} T_{\beta_1 \dots \beta_q}^{\alpha_1 \dots \alpha_p} e_{\alpha_1} \otimes \dots \otimes e_{\alpha_p} \otimes e^{\beta_1} \otimes \dots \otimes e^{\beta_q} \quad (2.20)$$

2.2 Géodésiques

Soit M une variété différentiable de dimension n . Dans une carte de coordonnées $\{x^\alpha\}$, considérons une courbe $\gamma = \{x(\lambda) | \lambda \in [\lambda_0, \lambda_1]\}$ dont les extrémités sont les points $x_0 = x(\lambda_0)$ et $x_1 = x(\lambda_1)$; et soit

$$w(\gamma) = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} d\lambda \left(\frac{ds}{d\lambda} \right)^2 = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} d\lambda g_{\alpha\beta}(x(\lambda)) \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta, \quad (2.21)$$

$g_{\alpha\beta}$ définissant la métrique de M .

Une *géodésique* est une courbe qui rend $w(\gamma)$ stationnaire, c'est-à-dire $\delta w = 0$, les points x_0 et x_1 restant fixés dans la variation. Pour construire une géodésique entre deux points quelconques de la variété, on la détermine par continuité dans la succession des cartes qui contiennent les deux points. L'équation de la géodésique dans la carte sera donnée par l'équation d'Euler-Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial x^\alpha} = \frac{d}{d\lambda} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha}, \quad (2.22)$$

avec $L = g_{\alpha\beta}(x(\lambda)) \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta$. Notons que si λ représente un temps et si $ds^2 > 0$, $\frac{1}{2}mL$ représentera l'énergie cinétique d'une particule se déplaçant sur M et donc la géodésique décrira la trajectoire d'une particule libre sur M .

L'équation d'Euler-Lagrange donne alors

$$\left(\partial_\delta g_{\beta\gamma} \right) \dot{x}^\beta \dot{x}^\gamma = 2 \frac{d}{d\lambda} \left[g_{\delta\gamma} \dot{x}^\gamma \right] = 2 \partial_\beta g_{\delta\gamma} \dot{x}^\beta \dot{x}^\gamma + 2 g_{\delta\gamma} \ddot{x}^\gamma, \quad (2.23)$$

ou

$$g_{\delta\gamma} \ddot{x}^\gamma + \frac{1}{2} \left[\partial_\beta g_{\delta\gamma} + \partial_\gamma g_{\delta\beta} - \partial_\delta g_{\beta\gamma} \right] \dot{x}^\beta \dot{x}^\gamma = 0. \quad (2.24)$$

Multipliant par $g^{\alpha\delta}$ et sommant sur δ donne l'équation de la géodésique

$$\boxed{\ddot{x}^\alpha + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \dot{x}^\beta \dot{x}^\gamma = 0} \quad (2.25)$$

avec $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = g^{\alpha\alpha'} \Gamma_{\alpha'\beta\gamma}$ et

$$\boxed{\Gamma_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2} \left[\partial_\beta g_{\alpha\gamma} + \partial_\gamma g_{\alpha\beta} - \partial_\alpha g_{\beta\gamma} \right]} \quad (2.26)$$

$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ et $\Gamma_{\alpha\beta\gamma}$ s'appellent *symboles de Christoffel* de première et deuxième espèce, respectivement. Ce ne sont pas des tenseurs. Noter que

$$\boxed{\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = \Gamma_{\gamma\beta}^\alpha} \quad (2.27)$$

L'équation (2.25) entraîne que $g_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta$ est une grandeur conservée. Ce qu'on peut également voir par le fait que L ne dépend pas explicitement du paramètre λ (analogie en mécanique analytique : l'énergie d'un système autonome est conservée).

Soit maintenant une courbe γ joignant 1 à 2 telle que $L > 0$ sur γ et considérons

$$\mathcal{L}(1,2) \doteq \int_1^2 ds = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} d\lambda \sqrt{L}. \quad (2.28)$$

Dans un espace riemannien, $\mathcal{L}(1,2)$ mesure la longueur de la courbe qui joint 1 à 2. En relativité, g a la signature $(+, -, -, -)$; ceci implique que la courbe doit être de type temporel, c'est-à-dire intérieure au cône de lumière. Elle décrit la trajectoire d'une particule de masse $m > 0$. $ds = c d\tau$ et $\mathcal{L}(1,2)$ mesure le *temps propre* écoulé entre 1 et 2.

Nous cherchons la courbe qui rend $\mathcal{L}$ extrémale. Notons alors que ds ne dépend pas de la paramétrisation choisie

$$ds = \sqrt{\left(\frac{ds}{d\lambda}\right)^2} d\lambda = \sqrt{\left(\frac{ds}{d\lambda'}\right)^2} d\lambda'. \quad (2.29)$$

Nous prenons comme paramètre λ , s lui-même; alors $\dot{x}^\alpha = \frac{dx^\alpha}{ds}$ et

$$d\lambda \delta \sqrt{L} = \frac{d\lambda}{2\sqrt{L}} \delta L = \frac{1}{2} \delta L, \quad (2.30)$$

et nous obtenons la même équation que précédemment

$$\boxed{\frac{d^2}{ds^2} x^\alpha + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \frac{dx^\beta}{ds} \frac{dx^\gamma}{ds} = 0} \quad (2.31)$$

avec

$$\boxed{g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} = 1} \quad (2.32)$$

Il suffit de vérifier la condition (2.32) pour la condition initiale, puisque $g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds}$ est conservée par (2.31).

En relativité, on peut avoir $L = 0$ sur γ . Ce serait le cas pour un photon. Dans ce cas, on prendra un paramètre λ quelconque (par exemple x_0) mais l'on imposera

$$g_{\alpha\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial \lambda} \frac{\partial x^\beta}{\partial \lambda} = 0 \quad (2.33)$$

au lieu de (2.32). On parle alors d'une *géodésique nulle*. On pourrait de même définir des géodésiques spatiales, en imposant $g_{\alpha\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial \lambda} \frac{\partial x^\beta}{\partial \lambda} = -1$.

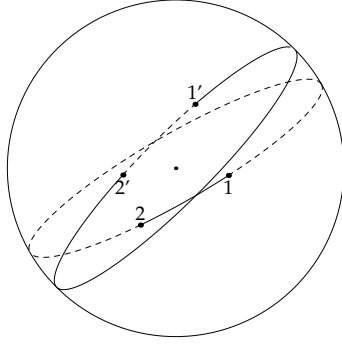


FIG. 2.2: Géodésiques de S^2 . Si les deux points sont proches (1-2), la géodésique correspond à la distance minimale. Si les deux points sont plus éloignés (1'-2'), la géodésique correspond à la distance maximale.

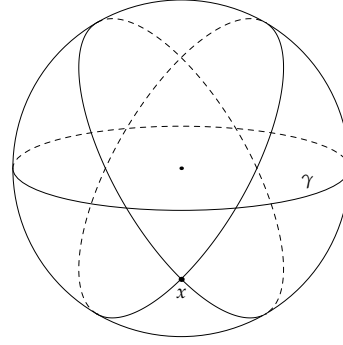


FIG. 2.3: Géodésiques de S^2 . Toutes les géodésiques passant par un point x extérieur à une géodésique γ intersectent γ ; le postulat d'Euclide n'est donc pas vérifié.

On peut montrer que dans le cas riemannien, $\mathcal{L}(1, 2)$ est minimale si 1 et 2 sont assez proches. En relativité, $\mathcal{L}(1, 2)$ sera maximale. En géométrie riemannienne, une géodésique est le chemin le plus court entre deux points voisins.

Prenons maintenant quelques cas classiques de variétés riemanniennes.

1. $M = \mathbb{R}^n$, non-compact. Les géodésiques sont des droites. Le postulat d'Euclide est satisfait : par un point extérieur à une géodésique γ passe une et une seule géodésique qui n'a pas d'intersection avec γ .
2. $M = S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \sum_{i=1}^3 (x^i)^2 = 1\}$, compact. Les géodésiques sont les *grands cercles*, c'est-à-dire l'intersection d'un plan passant par l'origine et S^2 (ex : l'équateur). Si les deux points 1 et 2 sont assez proches, la distance est minimale, mais devient maximale si les deux points sont assez éloignés (continuité) (Fig.2.2). Le postulat d'Euclide n'est pas vérifié : toutes les géodésiques passant par un point extérieur à la géodésique γ intersectent γ (Fig.2.3).
3. $M = H^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$, non-compact, munie de la métrique $ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$. Les géodésiques sont soit des cercles perpendiculaires à l'axe des x , de centre sur l'axe x , soit des droites perpendiculaires à l'axe des x (Fig.2.4). Dans ce cas aussi, le postulat d'Euclide n'est pas satisfait : il passe une infinité de géodé-

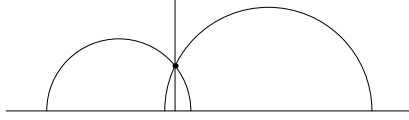


FIG. 2.4: Géodésiques de H^2 . Les géodésiques sont soit les demi-cercles dont le centre est sur l'axe des x , soit les droites perpendiculaires à l'axe des x .

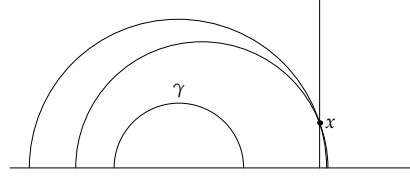


FIG. 2.5: Géodésiques de H^2 . Par un point donné x externe à la géodésique γ passent une infinité de géodésiques qui n'intersectent pas γ ; le postulat d'Euclide n'est donc pas vérifié.

siques parallèles à une géodésique donnée par un point extérieur à celle-ci (Fig.2.5).

4. Le disque de Poincaré, $M = P^2 = \{w \in \mathbb{C} \mid |w| < 1\}$, de métrique $\frac{dx^2 + dy^2}{[1 - x^2 - y^2]^2}$. $w \in P^2$ s'obtient à partir de $z \in H^2$ par la transformation

$$w = \frac{z - i}{z + i} \Rightarrow \operatorname{Im} z = \frac{1 - |w|^2}{|1 - w|^2}. \quad (2.34)$$

La métrique sur P^2 est la métrique induite par celle sur H^2 . Les géodésiques sont soit les cercles perpendiculaires au cercle unité, soit un diamètre (Fig.2.6).

Notons finalement que si la métrique est *conforme*, c'est-à-dire du type

$$ds^2 = f(x) \sum_{\alpha} (dx^{\alpha})^2, \quad f(x) > 0, \quad (2.35)$$

le produit scalaire entre deux vecteurs du plan tangent

$$(a, b) = f(x) \sum_{\alpha} a^{\alpha} b^{\alpha} = |a| |b| \cos \theta(a, b), \quad (2.36)$$

avec $|a|^2 = \sum_{\alpha} (a^{\alpha})^2 f(x)$, donc les angles sont les mêmes que dans le cas euclidien. Les métriques introduites sur les variétés S^2 , H^2 , et P^2 sont conformes.

Dans le cas riemannien, si $\dim M = 2$, on peut montrer que si $g_{\alpha\beta}$ est analytique (réelle) en x , il existe toujours des coordonnées où la métrique est conforme.

2.3 Transport parallèle. Dérivée covariante

Dans l'espace euclidien, nous pouvons comparer deux vecteurs situés en des points différents. Nous pouvons transporter parallèlement

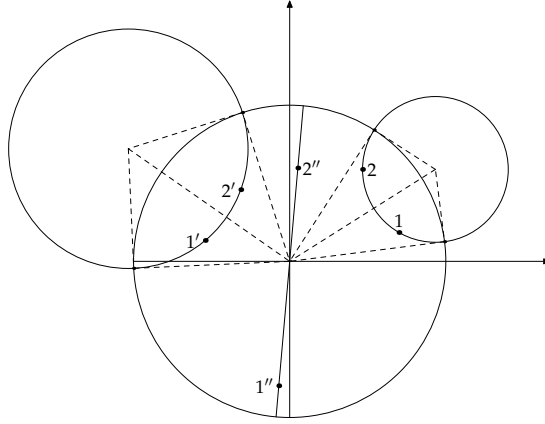


FIG. 2.6: Géodésiques de P^2 . Les géodésiques sont soit des arcs de cercles perpendiculaires au cercle unité (1-2, 1'-2'), soit un segment de diamètre (1''-2'').

l'un vers l'autre et ensuite comparer leurs coordonnées. Cette opération conserve les longueurs et les angles.

Sur une variété, nous ne pouvons a priori comparer deux vecteurs dans des plans tangents en deux points différents. On se propose de le faire lorsque les deux points sont infinitésimalement voisins. Pour cela, considérons le cas d'une hypersurface de dimension n . Elle est plongée dans un espace euclidien ($\mathbb{R}^{n+1}$, par exemple), dans lequel nous pouvons transporter parallèlement les vecteurs.

Soit donc une courbe γ partant de $x = x(0)$. Dans le temps dt , elle joint x à $x(t)$. Soient alors les vecteurs $v(x)$ dans $E(x)$ et $v(x+dx)$ dans $E(x+dx)$. Nous transportons parallèlement $v(x+dx)$ en x puis nous le projetons dans $E(x)$, obtenant le vecteur $Pv(x+dx)$ donné par

$$Pv(x+dx) = \sum_{\alpha} (v(x+dx), e^{\alpha}(x)) e_{\alpha}(x) \in E(x). \quad (2.37)$$

En effet

$$\begin{aligned} P^2v(x+dx) &= \sum_{\alpha} (Pv(x+dx), e^{\alpha}(x)) e_{\alpha}(x) \\ &= \sum_{\alpha, \beta} (e_{\beta}(x), e^{\alpha}(x)) (v(x+dx), e^{\beta}(x)) e_{\alpha}(x) = Pv(x+dx). \end{aligned} \quad (2.38)$$

Nous pouvons maintenant calculer

$$\frac{1}{dt} [Pv(x+dx) - v(x)] \Big|_{t=0} = \dot{x}^{\gamma}(0) [\partial_{\gamma} v^{\alpha} + (\partial_{\gamma} e_{\beta}, e^{\alpha}) v^{\beta}] e_{\alpha}, \quad (2.39)$$

où $\dot{x}^\alpha(0)$ est la composante d'un vecteur X dans $E(x)$ qui détermine la direction de laquelle nous avons pris la dérivée de v . Nous définissons donc la *dérivée dans la direction X* du vecteur v par

$$\nabla_X v = \dot{X}^\gamma \nabla_\gamma v^\alpha e_\alpha, \quad (2.40)$$

avec

$$\nabla_\gamma v^\alpha = \partial_\gamma v^\alpha + \Gamma_{\gamma\beta}^\alpha v^\beta \quad (2.41)$$

est la *dérivée covariante* de v^α dans la direction γ , avec $\Gamma_{\gamma\beta}^\alpha = (\partial_\gamma e_\beta, e^\alpha)$, dans notre cas.

Maintenant, l'opération est définie de manière intrinsèque, c'est-à-dire indépendante de l'espace ambiant. $\Gamma_{\gamma\beta}^\alpha$ s'appelle une *connexion* dans le cas général. Calculons-la dans notre cas

$$\Gamma_{\gamma\beta}^\alpha = g^{\alpha\delta} (\partial_\gamma e_\beta, e_\delta); \quad (2.42)$$

mais

$$(\partial_\gamma e_\beta, e_\delta) + (e_\beta, \partial_\gamma e_\delta) = \partial_\gamma (e_\beta, e_\delta) \equiv \partial_\gamma g_{\beta\delta}. \quad (2.43)$$

Donc si

$$(\partial_\gamma e_\beta, e_\delta) = \frac{1}{2} [\partial_\gamma g_{\delta\beta} + \partial_\beta g_{\delta\gamma} - \partial_\delta g_{\beta\gamma}] + \Delta(\gamma\beta\delta), \quad (2.44)$$

alors

$$\Delta(\gamma\beta\delta) + \Delta(\gamma\delta\beta) = 0. \quad (2.45)$$

Par ailleurs

$$\partial_\gamma e_\beta = \partial_{\gamma\beta}^2 y = \partial_\beta e_\gamma, \quad (2.46)$$

donc $\Delta(\gamma\beta\delta) = \Delta(\beta\gamma\delta)$. Combinant ces propriétés,

$$\begin{aligned} \Delta(\beta\gamma\delta) &= \Delta(\gamma\beta\delta) = -\Delta(\gamma\delta\beta) = -\Delta(\delta\gamma\beta) \\ &= \Delta(\delta\beta\gamma) = \Delta(\beta\delta\gamma) = -\Delta(\beta\gamma\delta), \end{aligned} \quad (2.47)$$

d'où $\Delta = 0$ et donc la définition intrinsèque du symbole de Christoffel est

$$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\alpha\delta} [\partial_\gamma g_{\delta\beta} + \partial_\beta g_{\delta\gamma} - \partial_\delta g_{\beta\gamma}]. \quad (2.48)$$

Noter la propriété $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = \Gamma_{\gamma\beta}^\alpha$.

Dans notre cas, la connexion est *métrique*, c'est-à-dire déterminée par la métrique. Elle est dite de *Levi-Civita*. Cela vient du fait que le transport parallèle que nous avons défini préserve la métrique.

Pour calculer $\nabla_X w$ pour un co-vecteur w , on peut procéder de la manière suivante. Soit v un vecteur, alors

$$\nabla_X(v^\alpha w_\alpha) = (\nabla_X v^\alpha)w_\alpha + v^\alpha(\nabla_X w_\alpha). \quad (2.49)$$

Mais, $v^\alpha w_\alpha$ étant un scalaire, on a

$$\nabla_X(v^\alpha w_\alpha) = X^\gamma \partial_\gamma(v^\alpha w_\alpha), \quad (2.50)$$

et donc

$$\begin{aligned} v^\alpha \nabla_X w_\alpha &= X^\gamma \left[\partial_\gamma(v^\alpha w_\alpha) - (\partial_\gamma v^\alpha)w_\alpha - \Gamma_{\gamma\beta}^\alpha v^\beta w_\alpha \right] \\ &= X^\gamma \left[v^\alpha \partial_\gamma w_\alpha - \Gamma_{\gamma\beta}^\alpha v^\beta w_\alpha \right] = X^\gamma v^\alpha \left[\partial_\gamma w_\alpha - \Gamma_{\gamma\alpha}^\beta w_\beta \right]. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Par conséquent

$$\nabla_X w = X^\gamma \nabla_\gamma w, \quad (2.52)$$

et

$$\nabla_\gamma w_\alpha = \partial_\gamma w_\alpha - \Gamma_{\gamma\alpha}^\beta w_\beta. \quad (2.53)$$

On voit que $\nabla_X v$ ne dépend pas du choix des coordonnées, donc la dérivée covariante transforme v en un tenseur (1,1); de même, $\nabla_X w$ transforme w en un tenseur (0,2).

Les connexions Γ ne sont pas des tenseurs. En effet, elles se transforment selon

$$\Gamma_{\beta'\gamma'}^{\alpha'} = a_{\alpha'}^{\alpha} b_{\beta'}^{\beta} b_{\gamma'}^{\gamma} \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} - b_{\gamma'}^{\gamma} b_{\beta'}^{\beta} \partial_\gamma a_{\beta}^{\alpha'}. \quad (2.54)$$

Pour un tenseur, on définira de même

$$\frac{1}{dt} \left[PT(x+dx) - T(x) \right]_{t=0} = \nabla_X T, \quad X^\alpha = \dot{x}^\alpha(0) \quad (2.55)$$

où

$$\begin{aligned} PT(x+dx) &= (T(x+dx), \epsilon^{\alpha_1} \otimes \dots \otimes \epsilon^{\alpha_p} \otimes e_{\beta_1} \otimes \dots \otimes e_{\beta_q}) \\ &\quad e_{\alpha_1} \otimes \dots \otimes e_{\alpha_p} \otimes \epsilon^{\beta_1} \otimes \dots \otimes \epsilon^{\beta_q}. \end{aligned} \quad (2.56)$$

Exprimant $T(x+dx)$ dans sa base et notant que

$$(a_1 \otimes \dots \otimes a_m, b_1 \otimes \dots \otimes b_m) = \prod_{i=1}^m (a_i, b_i), \quad (2.57)$$

on trouve

$$\nabla_X T = \sum_{\gamma} \dot{x}^\gamma \nabla_\gamma T, \quad (2.58)$$

et

$$\nabla_\gamma T_{\beta_1 \dots \beta_q}^{\alpha_1 \dots \alpha_p} = \partial_\gamma T_{\beta_1 \dots \beta_q}^{\alpha_1 \dots \alpha_p} + \sum_{j=1}^p \Gamma_{\gamma \alpha'_j}^{\alpha_j} T_{\beta_1 \dots \beta_q}^{\alpha_1 \dots \alpha'_j \dots \alpha_p} - \sum_{k=1}^q \Gamma_{\gamma \beta'_k}^{\beta_k} T_{\beta_1 \dots \beta'_k \dots \beta_q}^{\alpha_1 \dots \alpha_p}. \quad (2.59)$$

Propriétés. On peut montrer que le produit de deux tenseurs satisfait

$$\nabla_\gamma \left(T_{(\beta)}^{(\alpha)} S_{(\nu)}^{(\mu)} \right) = \left(\nabla_\gamma T_{(\beta)}^{(\alpha)} \right) S_{(\nu)}^{(\mu)} + \left(\nabla_\gamma S_{(\nu)}^{(\mu)} \right) T_{(\beta)}^{(\alpha)}. \quad (2.60)$$

Par ailleurs, la contraction des indices commute avec ∇_γ . Notons finalement la propriété importante

$$\nabla_\gamma g_{\alpha\beta} = 0 \Leftrightarrow \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha : \text{connexion métrique} \quad (2.61)$$

Le transport parallèle que nous avons défini a fait abstraction de l'espace euclidien ambiant, sauf pour un point. Dans cet espace, il conservait longueur et angles, d'où $\nabla_\gamma g_{\alpha\beta} = 0$. On peut généraliser de la manière suivante.

On *définit* la dérivée $\nabla_X T$ d'un tenseur comme un tenseur sur une variété telle que $\nabla_X T$ soit linéaire en X et possède les propriétés

- $\nabla_X T = X^\gamma \nabla_\gamma T$,
- $\nabla_X (T \otimes S) = (\nabla_X T) \otimes S + T \otimes (\nabla_X S)$,
- $\nabla_X T^{\text{contracté}} = (\nabla_X T)^{\text{contracté}}$.

On montre alors que $\nabla_X T$ est l'opération que nous avons définie, mais $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ est quelconque, et l'on peut avoir $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \neq \Gamma_{\gamma\beta}^\alpha$. On parle alors d'une connexion Γ *affine*. Par contre, comme $\nabla_\gamma v^\alpha$ se transforme comme un tenseur, Γ ne se transforme pas comme un tenseur, mais de la même manière que précédemment. Si de plus on exige que $\nabla_X g = 0$, alors Γ est une connexion métrique.

Les connexions affines sont utiles en mécanique quantique et en théorie de jauge. En relativité générale, nous n'utiliserons cependant que les connexions métriques.

Nous pouvons maintenant définir le *transport parallèle* d'un vecteur w le long d'une courbe c dont le vecteur tangent $v(t) = \{\dot{x}^\mu\}$ est donné pour $t \in [a, b]$. w est transporté parallèlement le long de c si pour tout $t \in [a, b]$

$$\nabla_v w = 0 \quad (2.62)$$

ou $\dot{x}^\mu \nabla_\mu w^\alpha = 0$, ou encore $\dot{w}^\alpha + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \dot{x}^\gamma w^\beta = 0$. Une *géodésique affine* sera donc définie comme la courbe telle que

$$\nabla_v v = 0 \quad (2.63)$$

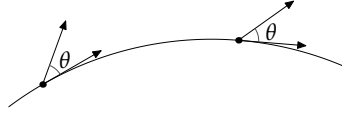


FIG. 2.7: Transport parallèle. La norme du vecteur transporté et l'angle qu'il fait avec la courbe sont conservés.

Si on transporte parallèlement deux vecteurs A et B le long d'une courbe c et que la connexion est métrique, le produit scalaire

$$\langle A, B \rangle = (A, gB) = A^\alpha B^\beta g_{\alpha\beta} \quad (2.64)$$

est conservé car

$$\nabla_v \langle A, B \rangle = (\nabla_v A, gB) + (A, g\nabla_v B) + (A, (\nabla_v g)B) = 0. \quad (2.65)$$

Donc dans le cas riemannien, ceci veut dire que le transport parallèle conserve la longueur des vecteurs et leurs angles, comme on l'avait exigé (voir Fig.2.7).

Notons enfin le résultat important suivant que nous démontrerons par la suite. Il existe autour de n'importe quel point donné x des coordonnées géodésiques telles que $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha(x) = 0$ et donc dans lesquelles $(\nabla_\gamma v^\alpha)(x) = (\partial_\gamma v^\alpha)(x)$.

2.4 Tenseur de courbure

Les dérivées covariantes selon deux directions différentes ne commutent pas car le transport parallèle d'un vecteur dépend du chemin choisi (en général). Calculons, si $T_\delta^\alpha = \nabla_\delta v^\alpha$ (tenseur (1,1))

$$\nabla_\gamma T_\delta^\alpha = \partial_\gamma T_\delta^\alpha + \Gamma_{\gamma\mu}^\alpha T_\delta^\mu - \Gamma_{\gamma\delta}^\mu T_\mu^\alpha, \quad (2.66)$$

donc

$$\nabla_\gamma \nabla_\delta v^\alpha = \partial_\gamma (\nabla_\delta v^\alpha) + \Gamma_{\gamma\mu}^\alpha \nabla_\delta v^\mu - \Gamma_{\gamma\delta}^\mu \nabla_\mu v^\alpha, \quad (2.67)$$

et finalement

$$[\nabla_\gamma, \nabla_\delta] v^\alpha = R_{\beta\gamma\delta}^\alpha v^\beta + (\Gamma_{\delta\gamma}^\beta - \Gamma_{\gamma\delta}^\beta) \nabla_\beta v^\alpha \quad (2.68)$$

où le deuxième terme représente un tenseur de torsion, nul pour un connexion symétrique, en particulier métrique. Nous serons toujours dans ce cas. Le premier terme est le *tenseur de courbure de Riemann-Christoffel*, défini par

$$R_{\beta\gamma\delta}^\alpha = \partial_\gamma \Gamma_{\delta\beta}^\alpha - \partial_\delta \Gamma_{\gamma\beta}^\alpha + \Gamma_{\gamma\mu}^\alpha \Gamma_{\delta\beta}^\mu - \Gamma_{\delta\mu}^\alpha \Gamma_{\gamma\beta}^\mu. \quad (2.69)$$

Propriétés. Si $\Gamma_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2}[\partial_\beta g_{\alpha\gamma} + \partial_\gamma g_{\alpha\beta} - \partial_\alpha g_{\beta\gamma}]$,

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{2} \left[\partial_{\delta\alpha}^2 g_{\beta\gamma} + \partial_{\gamma\beta}^2 g_{\alpha\delta} - \partial_{\delta\beta}^2 g_{\alpha\gamma} - \partial_{\gamma\alpha}^2 g_{\beta\delta} \right] - g^{\mu\nu} \left[\Gamma_{\mu\alpha\gamma} \Gamma_{\nu\beta\delta} - \Gamma_{\mu\alpha\delta} \Gamma_{\nu\beta\gamma} \right], \quad (2.70)$$

où on a utilisé la relation

$$g_{\alpha\mu} \partial_\gamma \Gamma_{\delta\beta}^\mu = \partial_\gamma \Gamma_{\alpha\delta\beta} - \Gamma_{\delta\beta}^\mu \left[\Gamma_{\mu\gamma\alpha} + \Gamma_{\alpha\gamma\mu} \right]. \quad (2.71)$$

Sous cette forme, et en utilisant les coordonnées géodésiques, on voit que

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = -R_{\alpha\beta\delta\gamma} = -R_{\beta\alpha\gamma\delta} = R_{\gamma\delta\alpha\beta} \quad (2.72)$$

ou encore

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} + R_{\alpha\delta\beta\gamma} + R_{\alpha\gamma\delta\beta} = 0. \quad \text{Bianchi I} \quad (2.73)$$

De plus,

$$\nabla_\alpha R_{\beta\gamma\delta\mu} + \nabla_\mu R_{\beta\gamma\alpha\delta} + \nabla_\delta R_{\beta\gamma\mu\alpha} = 0. \quad \text{Bianchi II} \quad (2.74)$$

Il y a donc pour une variété de dimension n $\frac{1}{12}n^2(n^2 - 1)$ composantes indépendantes de R .

On définit encore le *tenseur de Ricci*, $R_{\alpha\beta}$ (symétrique),

$$R_{\alpha\beta} = g^{\mu\nu} R_{\nu\alpha\mu\beta}, \quad (2.75)$$

et la *courbure scalaire*

$$R = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}. \quad (2.76)$$

On a la très importante identité

$$\nabla^\alpha \left[R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta} \right] = 0, \quad (2.77)$$

où le tenseur entre crochets s'appelle *tenseur d'Einstein*.

Preuve.

$$\begin{aligned} \nabla^\alpha R_{\alpha\beta} & \stackrel{\nabla_\gamma g_{\mu\nu}=0}{=} g^{\mu\nu} g^{\alpha\gamma} \nabla_\gamma R_{\nu\alpha\mu\beta} \\ & \stackrel{\gamma \leftrightarrow \mu, \alpha \leftrightarrow \nu \text{ et (2.72)}}{=} \frac{1}{2} g^{\mu\nu} g^{\alpha\gamma} \left[\nabla_\gamma R_{\nu\alpha\mu\beta} + \nabla_\mu R_{\nu\alpha\beta\gamma} \right] \\ & \stackrel{\text{Bianchi II (2.74)}}{=} -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} g^{\alpha\gamma} \nabla_\beta R_{\nu\alpha\gamma\mu}. \end{aligned} \quad (2.78)$$

$$\begin{aligned} \nabla^\alpha (R g_{\alpha\beta}) &= (\nabla^\alpha R) g_{\alpha\beta} \\ &= g^{\mu\nu} (\nabla^\alpha R_{\mu\nu}) g_{\alpha\beta} \\ &= g^{\mu\nu} \nabla_\beta R_{\mu\nu} \\ &= g^{\mu\nu} g^{\alpha\gamma} \nabla_\beta R_{\gamma\mu\alpha\nu} \\ &= -g^{\mu\nu} g^{\alpha\gamma} \nabla_\beta R_{\nu\alpha\gamma\mu}. \end{aligned} \quad (2.79)$$

2.5 Interprétation du tenseur de courbure

Nous allons donner une interprétation géométrique du tenseur de courbure. Soit le quadrilatère infinitésimal représenté dans la figure 2.8. Calculons le transport parallèle selon le chemin $c_1 = pqr$ d'un vecteur v

$$v_{c_1}^\alpha(q) = v^\alpha(p) - \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha(p) dx^\beta v^\gamma(p). \quad (2.80)$$

avec le signe $-$ car on va de x à $x + dx$, et

$$v_{c_1}^\alpha(r) = v_{c_1}^\alpha(q) - \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha(q) dy^\beta v_{c_1}^\gamma(q), \quad (2.81)$$

donc

$$\begin{aligned} v_{c_1}^\alpha(r) = & v^\alpha(p) - \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha(p) dx^\beta v^\gamma(p) \\ & - \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha(q) dy^\beta \left[v^\gamma(p) - \Gamma_{\beta'\gamma'}^\gamma(p) dx^{\beta'} v^{\gamma'}(p) \right] \end{aligned} \quad (2.82)$$

et, négligeant les termes cubiques en dx ou dy , on a

$$\begin{aligned} v_{c_1}^\alpha(r) = & v^\alpha - \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha dx^\beta v^\gamma - \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha dy^\beta v^\gamma \\ & - (\partial_{\beta'} \Gamma_{\gamma\beta}^\alpha) v^\gamma dx^{\beta'} dy^\beta + \Gamma_{\gamma\beta}^\alpha \Gamma_{\beta'\gamma'}^\gamma dx^{\beta'} dy^\beta v^{\gamma'} \end{aligned} \quad (2.83)$$

Pour calculer le résultat selon $c_2 = psr$, on change simplement dx et dy . Alors

$$\oint_{\square} v^\alpha = v_{c_1}^\alpha - v_{c_2}^\alpha = R_{\beta\gamma\delta}^\alpha v^\beta dy^\gamma dx^\delta. \quad (2.84)$$

On voit donc que le tenseur de courbure mesure la dépendance du transport parallèle dans le chemin suivi (chemin fermé : la valeur de v a changé). Si $R_{\beta\gamma\delta}^\alpha = 0$, il n'y a pas de dépendance du chemin dans une région simplement connexe (on décompose le chemin en morceaux infinitésimaux).

Quand $R_{\beta\gamma\delta}^\alpha = 0$? Si dans un système de coordonnées la métrique est diagonale et constante, c'est-à-dire $g_{\alpha\beta} = \eta_\alpha \delta_{\alpha\beta}$, $\eta_\alpha = \pm 1$, alors $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = 0 \Rightarrow R_{\beta\gamma\delta}^\alpha = 0$. On peut montrer que l'inverse est vrai : si $R_{\beta\gamma\delta}^\alpha = 0$, il existe un système de coordonnées où $g_{\alpha\beta} = \eta_\alpha \delta_{\alpha\beta}$. De tels espaces sont dits *plats*.

Exemple. Si $n = 2$, on peut, par changement de variables, diagonaliser g et écrire la métrique sous forme conforme

$$g_{\alpha\beta} = f(x) \delta_{\alpha\beta}, \quad (2.85)$$

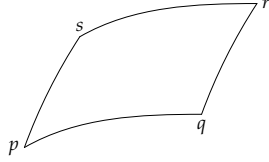


FIG. 2.8: Quadrilatère infinitésimal avec $p \equiv x$, $q = x + dx$, $r = x + dx + dy$, et $s = x + dy$.

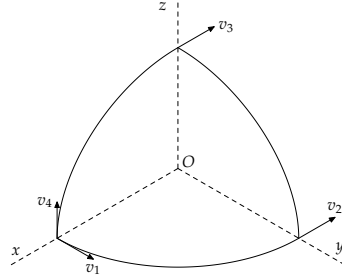


FIG. 2.9: Transport parallèle le long d'un triangle équilatéral sur la sphère S^2 . Le vecteur v_1 au point de départ est $\in Oxy$ et $\perp Ox$. Après transport le long du premier côté du triangle, le vecteur sera $\in Oxy$ et $\perp Oy$ (v_2); après le deuxième, il sera $\in Oxz$ et $\perp Oz$ (v_3); après le tour complet, il sera $\in Oxz$ et $\perp Ox$ (v_4). Le transport parallèle le long d'un chemin fermé modifie donc le vecteur ($v_1 \neq v_4$).

avec $f > 0$ si la variété est riemannienne. Alors

$$R_{1212} = -\frac{f \Delta \ln f}{2} \quad (2.86)$$

avec $R_{\alpha\beta} = \frac{R}{2} g_{\alpha\beta}$ et $R = \frac{-\Delta \ln f}{f}$. Les espaces à courbures constantes sont donc ceux pour lesquels il existe ψ tel que $f(x) = e^{\psi(x)}$, avec

$$-\Delta \psi = \frac{R}{2} e^{\psi}, \quad \text{Equation de Liouville} \quad (2.87)$$

2.6 Géométrie d'une surface à deux dimensions

Voici quelques compléments de géométrie de surface utiles pour comprendre les définitions plus générales traitées dans les section précédentes.

2.6.1 Notions de courbure

Soit une courbe plane. Plaçons nous en un point P donné et choisissons les axes tels que l'axe x soit tangent à la courbe et l'axe y soit normal, tel représenté dans la figure 2.10. On a $y = f(x)$, $f'(0) = 0$. Pour $x \simeq 0$, on écrit

$$y = \frac{1}{2} \kappa x^2 + \dots, \quad (2.88)$$

avec $\kappa = f''(0)$ la courbure en P . $\kappa = \pm \rho^{-1}$, où ρ est le rayon du cercle qui approxime la courbe en 0.

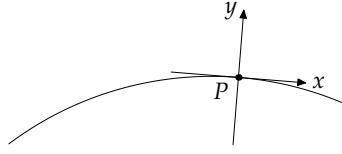


FIG. 2.10: Courbure d'une courbe. On place les axes tels que Px soit tangent à la courbe, alors que Py est normal.

Dans le cas de la surface, plaçons nous à nouveau en P et choisissons les axes tels que $x^1 x^2$ soit le plan tangent et x^3 soit normal. Près de 0,

$$x^3 = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 b_{ij} x^i x^j, \quad b_{ij} = b_{ji} \quad (2.89)$$

si $(x^1, x^2) = \lambda n$, avec $n^2 = 1$. Le plan vertical supporté par n intersecte la surface pour former une courbe

$$x^3 = \frac{\lambda^2}{2} (nb, n) \quad (2.90)$$

de courbure (n, bn) en 0 (Fig.2.11). Mais

$$\lambda_{\min} \leq (n, bn) \leq \lambda_{\max}, \quad (2.91)$$

où λ est la valeur propre de b . La courbure moyenne est donnée par

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \text{Tr } b. \quad (2.92)$$

La courbure de Gauss est donnée par

$$\kappa = \lambda_1 \lambda_2 = \det b. \quad (2.93)$$

En diagonalisant b , on peut écrire dans des nouvelles coordonnées

$$x^3 = \frac{1}{2} [\lambda_1 (y^1)^2 + \lambda_2 (y^2)^2], \quad (2.94)$$

Un théorème de Gauss affirme que κ est la seule courbure intrinsèque, c'est-à-dire dépendant de g_{ij} et de ses dérivées. Montrons que $\kappa = R_{1212}(0)$ comme nous l'avons défini. La métrique induite est, en y ,

$$ds^2 = g_{ij} dy^i dy^j, \quad (2.95)$$

avec

$$g_{ij} = [1 + \lambda_i^2 (y_j)^2]^2, \quad g_{12} = \lambda_1 \lambda_2 y^1 y^2. \quad (2.96)$$

On voit que $\partial_k g_{ij} = \mathcal{O}(x)$ donc $\Gamma_{ij}^k(0) = 0$ et

$$R_{1212} = \partial_{12}^2 g_{12} = \lambda_1 \lambda_2 = \kappa, \quad \frac{R}{2} = \kappa. \quad (2.97)$$

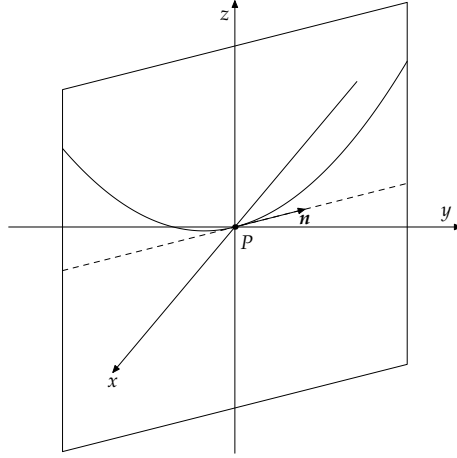


FIG. 2.11: Courbure d'une surface. En un point P de la surface, on place les axes tels que Px^1x^2 soit tangent et Px^3 normal à la surface. Le plan vertical supporté par $\mathbf{n}$ intersecte la surface pour former la courbe $x^3 = \lambda^2(\mathbf{n}\mathbf{b}, \mathbf{n})/2$ de courbure $(\mathbf{n}, \mathbf{b}\mathbf{n})$.

2.6.2 Élément de surface.

Soient e_1 et e_2 deux vecteurs de base du plan tangent en P . Alors $e_1 \wedge e_2$ est normal au plan tangent. L'élément de surface s'écrit

$$d\sigma = e_1 dx^1 \wedge e_2 dx^2 = dx^1 dx^2 |e_1 \wedge e_2| \mathbf{n}, \quad (2.98)$$

avec

$$|e_1 \wedge e_2| = \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} = \sqrt{|g|}, \quad (2.99)$$

car

$$|e_1 \wedge e_2|^2 = |e_1|^2 |e_2|^2 \sin^2 \theta = |e_1|^2 |e_2|^2 (1 - \cos^2 \theta). \quad (2.100)$$

2.6.3 Théorème de Gauss-Bonnet.

Soit M une variété compacte orientable de dimension 2

$$\frac{1}{4\pi} \int_M R \sqrt{|g|} d^2x = 2 - 2g, \quad (2.101)$$

où g est le nombre d'anses. Soit $\triangle$ un triangle formé de géodésiques d'angles θ_i ,

$$\int_{\triangle} R \sqrt{|g|} d^2x = -\pi + \sum_{i=1}^3 \theta_i \quad (2.102)$$

avec

$$\kappa > 0, \quad \sum \theta_i > \pi \quad (2.103)$$

$$\kappa < 0, \quad \sum \theta_i < \pi \quad (2.104)$$

2.7 Coordonnées géodésiques

Nous montrons qu'il est toujours possible de trouver un système de coordonnées tel que autour d'un point donné $\tilde{x}$, on ait

$$g_{\alpha\beta}(x) = \eta_{\alpha\beta} + \mathcal{O}((x - \tilde{x})^2), \quad \eta_{\alpha\beta} = \eta_\alpha \delta_{\alpha\beta}, \quad \eta_\alpha = \pm 1, \quad (2.105)$$

et donc $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha(x) = 0$ et $(\nabla_\gamma v^\alpha)(x) = (\partial_\gamma v^\alpha)(x)$. Il y a une infinité de tels systèmes, reliés entre eux par la transformation linéaire

$$(x' - \tilde{x}')^{\alpha'} = \Lambda_{\alpha'}^{\alpha}(x - \tilde{x})^\alpha, \quad (2.106)$$

où $\Lambda_{\alpha'}^{\alpha} \Lambda_{\beta'}^{\beta} \eta_{\alpha'\beta'} = \eta_{\alpha\beta}$. Dans ces coordonnées l'équation d'une géodésique est $\frac{d^2 x^\alpha}{ds^2} = 0$.

Interprétation. En géométrie riemannienne, g est définie positive, donc $\eta_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$ et le résultat signifie que l'on peut choisir un système de coordonnées cartésien (défini à une rotation près), tel que la géométrie soit euclidienne dans un très petit voisinage d'un point donné (Gauss).

En relativité, on a $\eta_0 = 1$ et $\eta_i = -1$ (théorème de Sylvester), donc le résultat s'interprète en disant que l'on peut choisir un *référentiel d'inertie local* (défini à une transformation de Lorentz près), où au voisinage d'un point donné de l'espace-temps la métrique soit celle de la relativité restreinte.

Preuve. Supposons qu'initialement on ait la carte x' autour du point $\tilde{x}'$ et à $\tilde{x}'$ correspond $\tilde{x}$ dans la nouvelle carte x . La nouvelle connexion sera

$$\Gamma_{\gamma\beta}^\alpha(x) = \frac{\partial x'^{\gamma'}}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x'^{\beta'}}{\partial x^\beta} \left[\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^{\alpha'}} \Gamma_{\gamma'\beta'}^{\alpha'}(x') - \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x'^{\gamma'} \partial x'^{\beta'}} \right] \quad (2.107)$$

on voit que si

$$\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^{\alpha'}} = A_{\alpha'}^\alpha + A_{\mu'}^\alpha \Gamma_{\alpha'\beta'}^{\mu'}(\tilde{x}')(x' - \tilde{x}')^{\beta'}, \quad (2.108)$$

avec $A_{\alpha'}^\alpha$ quelconque, alors le crochet s'annule en $\tilde{x}$, donc $\Gamma_{\gamma\beta}^\alpha(\tilde{x}) = 0$, ce qui entraîne $\Gamma_{\alpha\gamma\beta}(\tilde{x}) = 0$, et comme

$$(\partial_\beta g_{\alpha\gamma})(\tilde{x}) = \Gamma_{\alpha\beta\gamma}(\tilde{x}) + \Gamma_{\gamma\beta\alpha}(\tilde{x}) = 0 \quad (2.109)$$

donc $g_{\alpha\beta}(x) = g_{\alpha\beta}(\tilde{x}) + \mathcal{O}((x - \tilde{x})^2)$, mais

$$g_{\alpha\beta}(x) = B_{\alpha'}^{\alpha} B_{\beta'}^{\beta} g'_{\alpha'\beta'}(x') \quad (2.110)$$

avec $B_{\alpha}^{\alpha'} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}}(x)$, et donc $B_{\alpha}^{\alpha'} A_{\beta'}^{\alpha} = \delta_{\beta}^{\alpha'}$. g aura le même nombre de valeurs propres positives que g' (théorème d'inertie).

Nous voulons que $g_{\alpha\beta}(x) = \eta_{\alpha\beta}$. Par conséquent, nous devons résoudre l'équation, en écriture matricielle, $B_{\alpha}^{\alpha'} \equiv (B)_{\alpha\alpha'}$,

$$Bg'B^t = \eta \quad (2.111)$$

Mais il existe Ω tel que $\Omega\Omega^t = 1$ et $\Omega g\Omega^t = \lambda g$ ou $\lambda_{\alpha}\eta_{\alpha}$ est une valeur propre de g' ($\lambda_{\alpha} > 0$), alors la solution générale de l'équation (2.111) est

$$B = \Lambda \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \Omega, \quad (2.112)$$

avec Λ une matrice quelconque telle que $\Lambda\eta\Lambda^t = \eta$. Dans le cas riemannien, $\eta = 1$ et $\Lambda \in O(n)$; en relativité $\Lambda \in O(1,3)$ est une transformation de Lorentz.

2.8 Equation des déviations géodésiques

La courbure mesure également l'écart entre deux géodésiques très voisines au cours du temps. Soit une géodésique γ d'équation

$$\ddot{x}^{\alpha} + \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} \dot{x}^{\gamma} \dot{x}^{\beta} = 0. \quad (2.113)$$

Un écart infinitésimal dans la condition initiale entraîne un écart δx qui sera donné par

$$\delta \ddot{x}^{\alpha} + 2\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}(x) \dot{x}^{\gamma} \delta \dot{x}^{\beta} + \partial_{\mu} \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} \delta x^{\mu} \dot{x}^{\gamma} \dot{x}^{\beta} = 0, \quad (2.114)$$

mais

$$\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}(x) \dot{x}^{\gamma} \delta \dot{x}^{\beta} = \frac{d}{dt} [\delta x^{\beta} \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} \dot{x}^{\gamma}] - \delta x^{\beta} [\partial_{\mu} \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}(x) \dot{x}^{\gamma} \dot{x}^{\mu} + \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} \dot{x}^{\gamma}]. \quad (2.115)$$

Utilisant (2.113) pour $\ddot{x}^{\gamma}$ dans cette expression et remplaçant dans (2.114),

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [\delta \dot{x}^{\alpha} + \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} \dot{x}^{\gamma} \delta x^{\beta}] + \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} \dot{x}^{\gamma} [\delta \dot{x}^{\beta} + \Gamma_{\mu\nu}^{\beta} \dot{x}^{\mu} \delta x^{\nu}] \\ + \delta x^{\mu} [\partial_{\mu} \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} - \partial_{\beta} \Gamma_{\mu\delta}^{\alpha} \Gamma_{\beta\gamma}^{\delta} - \Gamma_{\delta\beta}^{\alpha} \Gamma_{\gamma\mu}^{\delta}] \dot{x}^{\beta} \dot{x}^{\gamma} = 0. \end{aligned} \quad (2.116)$$

Notant que $\delta \dot{x}^{\alpha} + \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} \dot{x}^{\gamma} \delta x^{\beta} = \nabla_{\dot{x}} \delta x^{\alpha}$, l'équation s'écrit

$$\nabla_{\dot{x}}^2 \delta x^{\alpha} + R_{\gamma\mu\beta}^{\alpha} \dot{x}^{\gamma} \dot{x}^{\beta} \delta x^{\mu} = 0. \quad (2.117)$$

Penser à $\nabla_v = \frac{D}{Dv}$, la dérivée le long de la trajectoire.

Dans un espace plat, $R_i = 0$ et $\nabla_x^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$, donc

$$\delta x^\alpha = v^\alpha \tau + \delta x^\alpha(0), \quad (2.118)$$

c'est-à-dire que l'écart croît linéairement. Dans le cas de dimension 2, $R > 0$ entraîne une diminution de l'écart ; les géodésiques tendent à se croiser. Si $R < 0$, l'écart augmente ; les géodésiques voisines s'éloignent exponentiellement vite.

Chapitre 3

Relativité générale

3.1 La théorie d'Einstein. Les postulats de la relativité générale

La théorie de Newton est basée sur l'action instantanée à distance d'une particule sur une autre. Elle n'est donc pas compatible avec la relativité restreinte. Le problème de la relativité générale est essentiellement de construire une théorie de la gravitation relativiste. Il s'agit de généraliser à la fois la théorie de Newton et la relativité restreinte, sur la base de postulats découlant d'un certain nombre d'arguments.

Premier postulat.

L'espace-temps est une variété différentiable à 4 dimensions munie d'une métrique g .

C'est évidemment une généralisation de la situation de la relativité restreinte où la métrique g est η , où l'on peut introduire des coordonnées cartésiennes globalement, le passage d'un système de coordonnées cartésiennes à l'autre s'effectue à l'aide de transformations linéaires (Lorentz-Poincaré) qui préservent la métrique. Ce sont les référentiels d'inertie. L'introduction d'une métrique de l'espace-temps vient de la nécessité de mesurer le temps et les distances.

Le deuxième postulat est le principe d'équivalence. Ce principe, au coeur de la théorie, du point de vue heuristique est basé sur les faits suivants. Dans la théorie de Newton, on observe une remarquable coïncidence : la masse inertielle est égale à la masse gravifique. Expliquons ce point.

- La *masse inertielle* m_I est celle qui multiplie l'accélération, c'est-à-dire $m_I \mathbf{a} = \mathbf{F}$.
- Dans un potentiel gravifique Φ , l'équation de Poisson est $\Delta\Phi = 4\pi G\rho$. Une particule test de *masse gravifique passive* m_P ressent une force $\mathbf{F} = -m_P \nabla\Phi$.
- Par ailleurs, une particule massive crée un potentiel gravifique $\Phi = -m_A G/r$. La masse m_A apparaissant dans cette équation peut être appelée *masse gravifique active*.

C'est un fait expérimental (Eötvös) bien établi que

$$m_I = m_P = m_A \equiv m. \quad (3.1)$$

La conséquence de ce fait est que le mouvement d'une particule test soumise uniquement à un champ gravitationnel est indépendant de sa masse et composition (postulat de Galilée), $\mathbf{a} = -\nabla\Phi$. Ceci implique que tous les corps subissent l'effet de la gravitation.

Il y a une grande différence de ce point de vue entre la gravitation et les autres forces, pour lesquelles il existe toujours des particules qui y sont insensibles. Par exemple, le neutron est insensible à la force de Lorentz, l'électron aux interactions fortes.

Autre conséquence importante, l'effet d'un champ gravifique homogène et indépendant du temps. Soit $\mathcal{K}$ un observateur qui observe une particule soumise à un champ gravifique constant $-mge_3$, de sorte que

$$m\ddot{\mathbf{x}} = -mge_3. \quad (3.2)$$

Pour un observateur $\mathcal{K}'$ qui se déplace avec une accélération constante ge_3 par rapport à $\mathcal{K}$ ($\mathcal{K}'$ est donc non inertiel), l'équation du mouvement sera $m\ddot{\mathbf{x}}' = 0$. Par conséquent, le mouvement sera rectiligne (la droite est la géodésique). Il est impossible de distinguer par le mouvement d'une particule le champ gravifique homogène d'une accélération. Si le potentiel Φ correspond à un champ inhomogène ($\Delta\Phi \neq 0$), $\mathcal{K}'$ verra deux particules identiques partant de la même hauteur et voisines, suivre sur de *courtes distances* des droites parallèles qui vont peu à peu se courber sur de plus grandes distances et avoir tendance à se rapprocher (déviations de deux géodésiques voisines si la courbure est non nulle).

Ceci amène à postuler le principe d'équivalence de la manière suivante.

Deuxième postulat : Principe d'équivalence.

Pour toute région infiniment petite de l'espace-temps (c'est-à-dire suffisamment petite que la variation spatiale et temporelle de la gravitation peut être négligée), il existe un système de coordonnées $\mathcal{K}_0 = \{x^\alpha\}$ dans lequel la gravitation n'a aucune influence soit sur le mouvement des particules soit sur tout autre processus physique. En particulier, les lois qui décrivent les processus physiques au moyen de la relativité restreinte sont valables dans ce système $\mathcal{K}_0$.

Les différents systèmes de coordonnées $\mathcal{K}_0$ seront reliés entre eux par une transformation de Lorentz. On les appelle des *référentiels d'inertie locaux*.

Nous avons vu qu'il existe de tels référentiels d'inertie locaux si la métrique $g_{\alpha\beta}(x)$ à une signature $(+, -, -, -)$ comme $\eta_{\alpha\beta}$ et que la connexion est métrique : ce sont les coordonnées géodésiques.

Troisième postulat.

Le mouvement d'une particule qui ne subit aucune autre force que la gravitation est une ligne géodésique.

Ceci résulte naturellement du fait que l'équation $\delta \int ds = 0$ ne dépend pas du choix de coordonnées et que dans $\mathcal{K}_0$, elle correspond à la relativité restreinte.

L'équation d'une géodésique ne fait pas apparaître la masse, donc elle doit correspondre à une généralisation de l'équation de Newton,

$$\ddot{x}^\alpha = -\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \dot{x}^\beta \dot{x}^\gamma. \quad (3.3)$$

Γ devrait jouer le rôle de $\nabla\Phi$, donc les éléments de la métrique $g_{\alpha\beta}$ jouent le rôle du potentiel gravifique.

Quatrième postulat : Principe de covariance.

Tous les observateurs sont équivalents. Les équations de la physique devraient avoir une forme tensorielle.

On a donc généralisé le principe de la relativité aux systèmes de coordonnées quelconques-référentiels inertiels ou non.

Dans le référentiel $\mathcal{K}_0$, localement, les lois de la physique sont celles de la relativité restreinte. Comment écrire ces lois dans un référentiel quelconque ? Le principe de couplage minimal (ou de simplicité) consiste en la règle suivante.

Cinquième postulat :

Principe du couplage gravitationnel minimal.

Remplacer dans les équations de la relativité restreinte

1. $\eta_{\alpha\beta} \rightarrow g_{\alpha\beta}$.
2. $\partial_\alpha \rightarrow \nabla_\alpha$.
3. ne pas ajouter de termes contenant explicitement la courbure.

Finalement, on a le

Sixième postulat : Principe de correspondance.

Retrouver la théorie de Newton comme une limite de la théorie générale.

3.2 L'équation d'Einstein

Il reste à trouver une équation qui permette de déterminer la métrique, g , dans le vide ou en présence de matière.

La théorie de Newton a servi de guide heuristique en la matière. On a l'équation de Poisson

$$\Delta\Phi = 4\pi G\rho \quad (3.4)$$

En relativité générale, $\Phi \rightarrow g$, ρ est proportionnel à la densité de masse, et la masse inertielle est proportionnelle à l'énergie, et l'énergie, les impulsions et les tensions sont réunies en un tenseur $T_{\alpha\beta}$.

L'équation de Poisson fait intervenir les deuxièmes dérivées de Φ . Il faut donc chercher une équation qui fasse intervenir les deuxièmes dérivées de g . La courbure de Riemann est de ce type.

Si d'autre part on cherche dans l'équation de Newton l'évolution de la déviation infinitésimale δx , la trajectoire d'une particule soumise à un potentiel gravifique Φ on trouve

$$\delta \ddot{x}^i = -(\partial_{ij}^2 \Phi) \delta x^j. \quad (3.5)$$

Or la déviation δx de deux géodésiques voisines est donnée par

$$\nabla_{\dot{x}}^2 \delta x^\alpha = -R_{\beta\gamma\delta}^\alpha \dot{x}^\beta \dot{x}^\gamma \delta x^\delta. \quad (3.6)$$

L'analogie est étonnante.

Ceci suggère que $\Delta\Phi$ devrait correspondre à un tenseur de rang 2, proportionnel à la courbure de Riemann et symétrique, puisque nous faisons correspondre à ρ le tenseur d'énergie-impulsion symétrique $T_{\alpha\beta}$.

Il n'y a dès lors que les choix suivants pour l'équation cherchée

$$R_{\alpha\beta} + bRg_{\alpha\beta} + \lambda g_{\alpha\beta} = \kappa T_{\alpha\beta}, \quad (3.7)$$

où $R_{\alpha\beta}$ est le tenseur de Ricci, R la courbure scalaire, et b, λ, κ des constantes. Si on exige que l'équation satisfasse

$$\nabla^\alpha T_{\alpha\beta} = 0, \quad (3.8)$$

on voit qu'il faut, par Bianchi II (2.74), prendre $b = -\frac{1}{2}$. On obtient donc, si $G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta}$,

$$G_{\alpha\beta} + \lambda g_{\alpha\beta} = \kappa T_{\alpha\beta}. \quad (3.9)$$

$\lambda = 0$ fut le premier choix d'Einstein. $\lambda \neq 0$ fut un second choix, qu'il a ensuite rejeté à cause de la loi de Hubble. λ s'appelle la *constante cosmologique*. Aujourd'hui, certaines théories cosmologiques en tiennent compte. Pour nous, l'équation d'Einstein sera

$$R_{\alpha\beta} - \frac{R}{2}g_{\alpha\beta} = \kappa T_{\alpha\beta} \quad (3.10)$$

où κ est une constante universelle. On peut encore écrire l'équation sous la forme

$$R_{\alpha\beta} = \kappa \left(T_{\alpha\beta} - \frac{T}{2}g_{\alpha\beta} \right), \quad (3.11)$$

où $T = g^{\alpha\beta}T_{\alpha\beta}$. Initialement, Einstein avait écrit cette équation sans le terme en T , n'obtenant pas ainsi $\nabla^\alpha T_{\alpha\beta} = 0$.

3.3 L'équation d'Einstein linéarisée

Si les champs gravifiques sont faibles, on peut supposer que

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}, \quad (3.12)$$

avec $h_{\alpha\beta}$ petit. Nous allons donc calculer le tenseur d'Einstein au plus bas ordre en h . On a $\Gamma = \mathcal{O}(h)$ et $g^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta} - h^{\alpha\beta} + \dots$. Donc

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{2} [\partial_{\alpha\delta}^2 h_{\beta\gamma} + \partial_{\beta\gamma}^2 h_{\alpha\delta} - \partial_{\beta\delta}^2 h_{\alpha\gamma} - \partial_{\alpha\gamma}^2 h_{\beta\delta}] \quad (3.13)$$

et

$$R_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} [\partial_{\alpha} \varphi_{\beta}(h) + \partial_{\beta} \varphi_{\alpha}(h)] - \frac{\square}{2} h_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \partial_{\alpha\beta}^2 h_{\mu}^{\mu}, \quad (3.14)$$

où $\varphi_{\beta}(h) = \partial^{\mu} h_{\mu\beta}$ et $\square = \partial^{\mu} \partial_{\mu}$, $\partial^{\mu} = \eta^{\mu\nu} \partial_{\nu}$. De plus,

$$R = \partial^{\alpha} \varphi_{\alpha}(h) - \square h_{\alpha}^{\alpha}. \quad (3.15)$$

Simplifions cette équation en posant

$$\bar{h}_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} h_{\mu}^{\mu}. \quad (3.16)$$

Alors

$$G_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} [\partial_{\alpha} \varphi_{\beta}(\bar{h}) + \partial_{\beta} \varphi_{\alpha}(\bar{h})] - \frac{\square}{2} \bar{h}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} [\partial^{\mu} \varphi_{\mu}(\bar{h})]. \quad (3.17)$$

Connaissant $\bar{h}$, il existe une fonction ψ_{α} telle que

$$\square \psi_{\alpha} = -\varphi_{\alpha}(\bar{h}), \quad (3.18)$$

de sorte que

$$G_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} \square \bar{k}_{\alpha\beta}, \quad (3.19)$$

où

$$\bar{k}_{\alpha\beta} = \bar{h}_{\alpha\beta} + \partial_{\alpha} \psi_{\beta} + \partial_{\beta} \psi_{\alpha} - \eta_{\alpha\beta} \partial^{\gamma} \psi_{\gamma}. \quad (3.20)$$

On a alors

$$\partial^{\alpha} \bar{k}_{\alpha\beta} = \varphi_{\beta}(\bar{h}) + \square \psi_{\beta} + \partial_{\beta} \partial^{\alpha} \psi_{\alpha} - \partial_{\beta} \partial^{\gamma} \psi_{\gamma} = 0. \quad (3.21)$$

En fait, le passage de $\bar{h}$ à $\bar{k}$ résulte d'un changement de système de coordonnées. En effet, si $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + \epsilon h_{\alpha\beta}$, et que l'on effectue un changement de variables $x \rightarrow x'$, tel que

$$\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\alpha'}} = \delta_{\alpha'}^{\alpha} + \epsilon \partial_{\alpha'} \psi^{\alpha}, \quad (3.22)$$

alors

$$g'_{\alpha'\beta'} = \eta_{\alpha'\beta'} + \epsilon [h_{\alpha'\beta'} + \partial_{\alpha'}\psi_{\beta'} + \partial_{\beta'}\psi_{\alpha'}] + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (3.23)$$

donc au niveau linéaire, h est déterminé à une *transformation de jauge* près

$$h_{\alpha\beta} \rightarrow h_{\alpha\beta} + \partial_\alpha\psi_\beta + \partial_\beta\psi_\alpha \quad (3.24)$$

$$\bar{h}_{\alpha\beta} \rightarrow \bar{h}_{\alpha\beta} + \partial_\alpha\psi_\beta + \partial_\beta\psi_\alpha - \eta_{\alpha\beta}(\partial^\gamma\psi_\gamma), \quad (3.25)$$

Imposer $\partial^\alpha \bar{h}_{\alpha\beta} = 0$ revient à choisir la jauge telle que $\partial^\alpha \bar{h}_{\alpha\beta} = -\square\psi_\beta$. Ce choix correspond à l'analogie de la jauge de Lorentz en électromagnétisme.

Les équations d'Einstein linéarisées s'écrivent donc

$$\square \bar{h}_{\alpha\beta} = -2\kappa T_{\alpha\beta} \quad (3.26)$$

$$\partial^\alpha \bar{h}_{\alpha\beta} = 0, \quad (3.27)$$

le tenseur $T_{\alpha\beta}$ étant lui-même évalué au plus bas ordre en $h_{\alpha\beta}$.

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta} \quad (3.28)$$

$$\bar{h}_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} - \frac{\eta_{\alpha\beta}}{2} h^\mu_\mu. \quad (3.29)$$

Ces équations sont manifestement des équations d'onde, car

$$\square = \frac{1}{c^2} \partial_t^2 - \Delta. \quad (3.30)$$

3.4 La limite newtonienne

Nous allons maintenant considérer le cas de métriques *stationnaires*, c'est-à-dire telles que $\partial_0 h_{\alpha\beta} = 0$, et de *vitesse des particules tests faibles* $|\frac{v}{c}| \ll 1$. Prenant pour $T_{\alpha\beta}$ le tenseur d'un fluide parfait; nous serons donc dans la situation où

$$|T_{00}| \gg |T_{0i}| \gg |T_{ij}|, \quad (3.31)$$

et alors $T_{00} \simeq \rho c^2$, et nous pouvons considérer que $\bar{h}_{0i} \simeq 0$, $\bar{h}_{ij} \simeq 0$, et la condition de jauge est satisfaite si $\partial^i h_{i\beta} = 0$. Comme

$$h_{\alpha\beta} = \bar{h}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} \bar{h}^\gamma_\gamma, \quad (3.32)$$

$$h_{00} = \frac{\bar{h}_{00}}{2}, \quad h_{0i} = 0, \quad h_{ij} = \frac{1}{2} \delta_{ij} \bar{h}_{00} \quad (3.33)$$

et $\Delta \bar{h}_{00} = 2\kappa \rho c^2$.

L'équation de la géodésique sera alors

$$\dot{x}^\alpha + \Gamma_{00}^\alpha (\dot{x}^0)^2 = 0, \quad (3.34)$$

car $|\dot{x}^i| \ll 1$ par hypothèse. Mais

$$\Gamma_{00}^\alpha = -\frac{1}{2}\eta_\alpha \partial_\alpha h_{00}, \quad (3.35)$$

donc $\ddot{x}^0 = 0$, autrement dit $\tau = t$ dans cette équation, et l'équation du mouvement de la particule test s'écrit

$$\frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = -\nabla \phi, \quad (3.36)$$

avec $\phi = \frac{c^2}{4}\bar{h}_{00}$. Donc ϕ obéit à l'équation

$$\Delta \phi = \frac{c^4}{2}\kappa\rho. \quad (3.37)$$

C'est l'équation de Poisson si

$$\kappa = \frac{8\pi G}{c^4} \quad (3.38)$$

Nous avons donc retrouvé le cas newtonien, dans la limite des champs gravitationnels faibles, stationnaires, et pour de faibles vitesses des particules

Il est important de noter que la métrique n'est pas la métrique de Minkowski

$$ds^2 = \left(1 + \frac{2\phi}{c^2}\right)(dx^0)^2 - \left(1 - \frac{2\phi}{c^2}\right)dx^2. \quad (3.39)$$

car

$$h_{00} = \frac{\bar{h}_{00}}{2}, \quad \bar{h}_{00} = \frac{4}{c^2}\phi, \quad \bar{h}_{ii} = \frac{\bar{h}_{00}}{2} \quad (3.40)$$

Ceci entraîne en particulier que le temps propre d'une horloge est affecté par un champ gravifique. Un effet de déplacement vers le rouge d'un spectre en présence d'un champ gravifique peut être prédit. Nous l'analyserons plus tard.

3.5 Ondes gravitationnelles

La théorie d'Einstein linéarisé est décrite par les équations

$$\square \bar{h}_{\alpha\beta} = -2\kappa T_{\alpha\beta} \quad (3.41)$$

$$\partial^\alpha \bar{h}_{\alpha\beta} = 0 \quad (3.42)$$

$$\partial^\alpha T_{\alpha\beta} = 0. \quad (3.43)$$

Ces équations sont à comparer à celles de l'équation électromagnétique

$$\square A_\alpha = J_\alpha \quad (3.44)$$

$$\partial^\alpha A_\alpha = 0 \quad (3.45)$$

$$\partial^\alpha J_\alpha = 0. \quad (3.46)$$

Ces équations se résolvent par l'emploi de transformées de Fourier, qui donnent les solutions comme superpositions d'ondes planes. Considérons donc les équations sans source. Les équations ont donc pour solution particulière

$$\bar{h}_{\alpha\beta} = B_{\alpha\beta} \exp(ik_\mu x^\mu) \quad (3.47)$$

$$A_\alpha = L_\alpha \exp(ik_\mu x^\mu), \quad (3.48)$$

avec $k^\mu k_\mu = 0$ et

$$k^\alpha B_{\alpha\beta} = 0 \quad (3.49)$$

$$k^\alpha B_\alpha = 0. \quad (3.50)$$

Elles correspondent à des ondes planes de fréquence $\omega = \frac{k_0}{c}$ et de vecteur d'onde $\mathbf{k}$ avec $\omega = c|\mathbf{k}|$. Dans les deux cas, ces ondes se propagent avec la vitesse de la lumière c . Dans le cas de la matière, ce sont des *ondes gravitationnelles* dont la théorie d'Einstein prédit l'existence, comme la théorie de Maxwell avait prédit les ondes électromagnétiques. Dans le cas de l'électromagnétique, les ondes sont *transverses* à leur direction de propagation. Il en est de même pour les ondes gravitationnelles comme nous allons le voir.

En électromagnétisme, on a encore la liberté de jauge

$$A_\alpha \rightarrow A_\alpha + \partial_\alpha \chi, \quad (3.51)$$

si $\square \chi = 0$, les équations de l'électromagnétisme sont encore satisfaites. On peut donc fixer la jauge en prenant $B_0 = 0$, et donc $\mathbf{kB} = 0$. Car si $B_0 \neq 0$, on peut prendre

$$A_\alpha = \left(B_\alpha - \frac{k_\alpha}{k_0} B_0 \right) \exp(ik_\mu x^\mu), \quad (3.52)$$

et il n'y a que deux paramètres indépendants, B_1 et B_2 par exemple, si $\mathbf{k} = \pm k_0(0, 0, 1)$.

Dans le cas gravitationnel, le changement de jauge

$$\bar{h}_{\alpha\beta} \rightarrow \bar{h}_{\alpha\beta} + \partial_\alpha \tau_\beta + \partial_\beta \tau_\alpha - \eta_{\alpha\beta} \partial^\gamma \tau_\gamma \quad (3.53)$$

laisse les équations (3.41-3.43) invariantes si $\square \tau_\alpha = 0$. Nous prendrons donc la *jauge transverse de trace nulle* (TT), donnée par

$$B_{\alpha 0} = 0 \quad \text{et} \quad B_\alpha^\alpha = 0, \quad k^\alpha B_{\alpha\beta} = 0, \quad h_{\alpha\beta} = \bar{h}_{\alpha\beta}. \quad (3.54)$$

Ceci est toujours possibles, car si on prend

$$\tau_\alpha = \frac{c_\alpha}{i} \exp(ik_\mu x^\mu), \quad (3.55)$$

$B_{\alpha\beta} \rightarrow B'_{\alpha\beta} = B_{\alpha\beta} + c_\alpha k_\beta + c_\beta k_\alpha - \eta_{\alpha\beta} D$, et en prenant $D = h^\gamma c_\gamma = \frac{1}{2} B_\alpha^\alpha$,
et

$$c_0 = \frac{1}{2k_0}(D - B_{00}), \quad c_i = -\frac{1}{k_0}(B_{i0} + c_0 k_i). \quad (3.56)$$

B' satisfait la condition et $k^\alpha B_{\alpha\beta} = k^\alpha B'_{\alpha\beta}$. On a donc, dans cette jauge,

$$B_{00} = B_{i0} = 0, \quad \sum_i B_{ii} = 0, \quad \sum_i k_i B_{ij} = 0. \quad (3.57)$$

Si on prend $k = k_0(0, 0, 1)$, il ne reste pour seuls éléments non nuls que deux paramètres

$$B_{12} = B_{21}, \quad B_{11} = -B_{22}. \quad (3.58)$$

Examinons maintenant l'effet de cette métrique sur une particule test

$$h_{\alpha\beta} = \text{Re } B_{\alpha\beta} \exp(ik_\mu x^\mu), \quad (3.59)$$

on voit que

$$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = -\frac{1}{2} \eta_\alpha \text{Im} \left[\exp(ik_\mu x^\mu) [k_\gamma B_{\alpha\beta} + k_\beta B_{\alpha\gamma} - k_\alpha B_{\beta\gamma}] \right], \quad (3.60)$$

donc $\Gamma_{00}^\alpha = 0$ et, de plus, $g_{00} = 1$, donc

$$\frac{dx^\beta}{d\tau} = c \delta_{\beta 0} \quad (3.61)$$

est une solution de l'équation des géodésiques et

$$\frac{dx^\beta}{d\tau} \frac{dx^\gamma}{d\tau} g_{\beta\gamma} = c^2, \quad (3.62)$$

donc une particule initialement au repos le reste, dans ce repère.

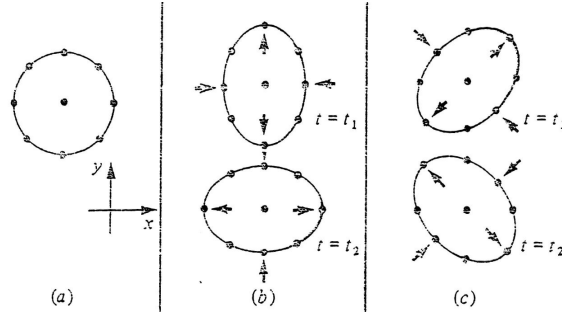


FIG. 3.1: (a) Un nuage de particules, disposées circulairement, avant qu'une onde gravitationnelle en mouvement selon l'axe z ne l'atteigne. (b) Distortion du nuage produit par une onde de polarisation $+$. Les deux schémas représentent la même onde, mais avec un déphasage de 180° . Les particules sont disposées selon les distances qui les séparent. (c) comme (b), mais avec la polarisation $\times$.

Considérons maintenant le cas de deux particules tests, A et B , au repos et très voisines. Soient δx^i les coordonnées du vecteur qui les joint. Leur distance d sera donnée au plus bas ordre par

$$d^2 = -g_{ij}\delta x^i\delta x^j = (\delta_{ij} - h_{ij})\delta x^i\delta x^j = \sum_i (\epsilon^i)^2, \quad (3.63)$$

avec $\epsilon^i = \delta x^i - \frac{1}{2}h_{ij}\delta x^j$ au plus bas ordre en h .

Comme dans l'espace euclidien, ϵ mesure leur séparation. On voit que celle-ci va varier périodiquement en présence d'une onde gravitationnelle. (Déviation géodésique $\sim R^\alpha_{\beta\gamma\delta}$). Si par exemple l'onde arrive dans la direction 3, de fréquence ω et

$$h_{11} = \alpha_1 \cos(\omega(t - x^3/c)) \quad (3.64)$$

$$h_{12} = \alpha_2 \cos(\omega(t - x^3/c)) \quad (3.65)$$

$$\epsilon^1 = \delta x^1 \left[1 - \frac{\alpha_1}{2} \cos(\omega(t - x^3/c)) \right] - \frac{\alpha_2}{2} \delta x^2 \cos(\omega(t - x^3/c)) \quad (3.66)$$

$$\epsilon^2 = \delta x^2 \left[1 + \frac{\alpha_1}{2} \cos(\omega(t - x^3/c)) \right] - \frac{\alpha_2}{2} \delta x^1 \cos(\omega(t - x^3/c)) \quad (3.67)$$

$$\epsilon^3 = \delta x^3, \quad (3.68)$$

on voit clairement le caractère transverse de l'onde. Elle n'affecte le mouvement des particules que dans les directions perpendiculaires à sa direction de propagation.

Comment détecter les ondes gravitationnelles? On a vu que leur effet sur un nuage de particules test serait de varier la distance entre

celles-ci – analogue de l'effet de la marée. Si ces particules test n'étaient pas libres mais contraintes à être les constituants d'un corps élastique, les ondes gravitationnelles feraient vibrer le corps. Si l'onde a une fréquence qui entre en résonance avec la fréquence de base du corps, alors la réponse serait amplifiée. L'effet est très faible, de l'ordre 10^{-2} .

Bien qu'aucune onde gravitationnelle n'ait encore été détectée sur Terre, trois expériences se poursuivent. Par contre, on a une évidence indirecte de leur existence dans certains pulsars. Pour le comprendre, il faut examiner comment les ondes gravitationnelles sont générées.

Commentaire. Il peut paraître étonnant que des particules au repos ne voient pas leur coordonnées changer quand une onde gravitationnelle arrive, mais leur distance oui. La situation est analogue à celle d'une surface en caoutchouc sur laquelle on dessine une grille de coordonnées de distance élémentaire a et que l'on étire ; les coordonnées ne changent pas, mais les distances réelles entre points de la grille oui.

3.6 Génération d'ondes gravitationnelles

L'équation d'Einstein linéarisée avec sources,

$$\square \bar{h}_{\alpha\beta} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\alpha\beta}, \quad (3.69)$$

a pour solution (onde sortante) causale

$$\bar{h}_{\alpha\beta}(x^0, \mathbf{x}) = -\frac{4G}{c^4} \int T_{\alpha\beta} \frac{(x^0 - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|, \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3 \mathbf{x}'. \quad (3.70)$$

Supposons que la source soit faite de matière localisée près de l'origine, et que les particules de la source ont une vitesse petite par rapport à c . A une distance $r = |\mathbf{x}|$ loin de la source, c'est-à-dire loin du plus grand déplacement des particules de la source, on peut approximer la solution par

$$\bar{h}_{\alpha\beta}(x^0, \mathbf{x}) = -\frac{4G}{rc^4} \int T_{\alpha\beta}(x^0 - r, \mathbf{x}') d^3 \mathbf{x}'. \quad (3.71)$$

On a par ailleurs l'équation de conservation

$$\partial^0 T_{0\beta} + \partial^k T_{k\beta} = 0. \quad (3.72)$$

Nous avons les identités suivantes

$$\begin{aligned} 0 &= \int \partial^k (T_{ki} x^j) d^3 x = \int (\partial^k T_{ki}) x^j + \int T_{ij} \\ &= - \int (\partial^0 T_{0i}) x^j + \int T_{ij}, \end{aligned} \quad (3.73)$$

d'où

$$\int T_{ij} = \frac{1}{2} \partial^0 \int T_{0i} x^j + T_{0j} x^i, \quad (3.74)$$

en utilisant la symétrie de T_{ij} . On a également

$$\begin{aligned} 0 &= \int \partial^k (T_{0k} x^i x^j) = \int (\partial^k T_{0k}) x^i x^j + \int (T_{0i} x^j + T_{0j} x^i) \\ &= - \int \partial^0 T_{00} x^i x^j + \int (T_{0i} x^j + T_{0j} x^i), \end{aligned} \quad (3.75)$$

d'où

$$\int T_{ij} = \frac{1}{2} \partial_0^2 \int T_{00} x^i x^j, \quad (3.76)$$

et donc

$$\bar{h}_{ij} = -\frac{2G}{rc^4} \partial_0^2 \int T_{00} (x^0 - r, \mathbf{x}) x^i x^j d\mathbf{x}. \quad (3.77)$$

La vitesse des particules étant petite $T_{00} \simeq \rho c^2$, on obtient finalement

$$\boxed{\bar{h}_{ij} = -\frac{2G}{rc^2} \partial_0^2 \int \rho (x^0 - r, \mathbf{x}) x^i x^j d^3x} \quad (3.78)$$

On voit donc que la métrique, donc le potentiel gravifique, est essentiellement donné par les seconds moments de la distribution de masse ρ . Les ondes gravitationnelles sont de nature essentiellement quadripolaires – par contraste, les ondes électromagnétiques sont dipolaires.

Illustrons ceci par un modèle très simple d'étoile binaire. Supposons que la source soit faite de deux étoiles de masse M effectuant un mouvement circulaire de rayon R autour de leur centre de masse, dans le plan (1,2), de fréquence ω ,

$$\rho(x^0, \mathbf{x}) = \sum_{\sigma=\pm 1} M \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_\sigma(x^0)), \quad (3.79)$$

avec $\mathbf{x}_\sigma = \sigma R(\cos \omega t, \sin \omega t, 0)$. Alors

$$\bar{h}_{11} = -\bar{h}_{22} = \frac{4G(2MR^2)}{c^4 r} \cos(2\omega(t - r/c)) \quad (3.80)$$

$$\bar{h}_{12} = \bar{h}_{21} = \frac{4G(2MR^2)}{c^4 r} \sin(2\omega(t - r/c)) \quad (3.81)$$

$$\bar{h}_{33} = 0. \quad (3.82)$$

Ceci représente une onde gravitationnelle de fréquence 2ω polarisée circulairement sur l'axe 3 où $r \sim x^3$ et que l'on peut voir comme une onde plane.

Un calcul qui requiert l'étude des termes d'ordre $\bar{h}_{\alpha\beta}^2$ montre qu'en fait les étoiles perdront de l'énergie en émettant des ondes gravitationnelles, de manière analogue à la perte d'énergie d'un électron classique tournant autour d'un proton par radiation. La vitesse à laquelle cette énergie E est perdue est donnée par

$$\frac{dE}{dt} = \frac{-32G}{5c^5} (2MR^2) = \omega^6. \quad (3.83)$$

Traitons maintenant le système d'étoiles binaires par la théorie de Newton. L'énergie dans le centre de masse est donnée par

$$E = -\frac{1}{2} \frac{M^2 G}{R}. \quad (3.84)$$

La loi de Kepler donne

$$R = \left[\left(\frac{T}{2\pi} \right)^2 2MG \right]^{1/3}, \quad (3.85)$$

donc

$$E = -\frac{1}{2} \frac{M^2 G}{\left[\left(\frac{T}{2\pi} \right)^2 2MG \right]^{1/3}}. \quad (3.86)$$

Si $E = E(t)$, par radiation, $T = T(t)$ et utilisant (3.83) dans (3.86), on trouve

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{4^3 \cdot 6}{5} (2\pi)^{8/3} \left(\frac{2MG}{c^3 T} \right)^{5/3}, \quad (3.87)$$

ou en nombres

$$\frac{dT}{dt} = -3.4 \cdot 10^{-12} \left(\frac{M}{M_{\text{solaire}}} \frac{1\text{heure}}{T} \right)^{5/3}. \quad (3.88)$$

Un pulsar binaire est tel que $M/M_{\text{solaire}} \simeq 1.4$, de même que son compagnon que l'on ne voit pas. La décroissance prédite de la période est de l'ordre de $10\mu\text{s}$ par année – l'orbite n'est pas vraiment circulaire. Après plusieurs années, en 1989, on a mesuré

$$\frac{dT}{dt} = (-2.422 \pm 0.006) \cdot 10^{-12}, \quad (3.89)$$

qui correspond à un accord jusqu'à présent de 1/3% avec la relativité générale. Le calcul détaillé requiert la solution du problème à deux corps en relativité générale. Il nécessite un calcul à l'ordre $(\frac{v}{c})^5$. La figure 3.2 illustre le remarquable accord de l'expérience avec la théorie. L'article de Straumann donne plus de détails sur ces systèmes.

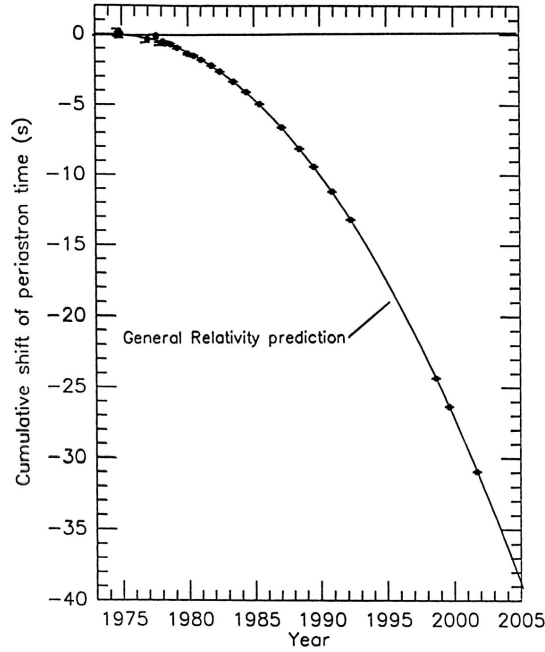


FIG. 3.2: Détections des effets de la radiation gravitationnelle dans un pulsar binaire. Le pulsar binaire PSR B1913+16 est une paire d'étoiles à neutrons en orbite mutuelle l'une autour de l'autre. L'émission de radiation gravitationnelle réduit la période orbitale. Une mesure de cette réduction est l'évolution temporelle du temps auquel a lieu le périastre (c'est-à-dire le point le plus proche entre un pulsar et son compagnon). La figure montre la valeur cumulée de ce décalage tel mesuré par J. Taylor et J. Weisberg au télescope Arecibo à Puerto Rico au cours de plusieurs décennies. Les points sont les mesures ; la ligne est le décalage prédit par la relativité générale comme conséquence de l'émission d'onde gravitationnelles. La correspondance est très bonne. L'effet des ondes gravitationnelles a donc été détecté dans l'univers, bien qu'il n'ait pas encore été détecté sur Terre.

3.7 La solution de Schwarzschild

Nous voulons résoudre l'équation d'Einstein dans le vide. Il existe plusieurs solutions exactes de ce problème, la plus importante étant celle de Schwarzschild et (1916). Elle devrait décrire la métrique à l'extérieur d'une étoile. Il est donc naturel de chercher une *solution à symétrie sphérique*. Il devrait donc y avoir un système de coordonnées $(t', r', \theta, \varphi)$ tel que, restreinte à $x'^0 = \text{cte}$ et $r' = \text{cte}$, la métrique soit proportionnelle à $d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2$, avec $\theta \in [0, \pi]$ et $\varphi \in [0, 2\pi]$. Nous cherchons donc une métrique de la forme

$$ds^2 = A'(dt')^2 + 2B'dt'dr' + C'(dr')^2 + D'(\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (3.90)$$

A' , B' , C' , et D' étant des fonctions de (t', r') seulement. Nous allons d'abord simplifier cette métrique par des changements de variables. Comme on doit avoir $D' < 0$ on peut poser

$$r = \sqrt{-D'(t', r')}, \quad (3.91)$$

d'inverse $r' = r'(t', r)$. Alors

$$ds^2 = A(dt')^2 + 2Bdt'dr + Cdr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (3.92)$$

avec A , B , et C des fonctions de (t', r) . Par ailleurs, il existe une nouvelle variable $t = t(t', r)$ et un facteur intégrant $I(t', r)$ tels que

$$dt = I(Adt' + Bdr), \quad (3.93)$$

qui rendent la métrique diagonale

$$ds^2 = g_0 dt^2 + g_r dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \quad (3.94)$$

Il faut calculer $R_{\alpha\beta}$ pour une métrique diagonale

$$ds^2 = \sum_{\alpha} g_{\alpha} (dx^{\alpha})^2. \quad (3.95)$$

Nous utilisons une formule plus simple pour le tenseur de Ricci

$$R_{\alpha\beta} = R_{\alpha\mu\beta}^{\mu} = \partial_{\mu}\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} - \partial_{\beta}\Gamma_{\alpha\mu}^{\mu} + \Gamma_{\lambda\mu}^{\mu}\Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda} - \Gamma_{\beta\lambda}^{\mu}\Gamma_{\alpha\mu}^{\lambda}, \quad (3.96)$$

mais

$$\Gamma_{\alpha\mu}^{\mu} = \frac{1}{2g}\partial_{\alpha}g, \quad (3.97)$$

où $g = \det g_{\alpha\beta}$. En effet,

$$\Gamma_{\alpha\mu}^{\mu} = \frac{1}{2}g^{\mu\mu}[\partial_{\alpha}g_{\nu\mu} + \partial_{\mu}g_{\nu\alpha} - \partial_{\nu}g_{\alpha\mu}] = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_{\alpha}g_{\mu\nu}, \quad (3.98)$$

mais si $\mathbf{g}$ est la matrice d'éléments $g_{\alpha\beta}$,

$$\partial_{\alpha} \text{Tr} \ln \mathbf{g} = \text{Tr} \mathbf{g}^{-1} \partial_{\alpha} \mathbf{g} = g^{\mu\nu} \partial_{\alpha} g_{\mu\nu}, \quad (3.99)$$

$\text{Tr} \ln \mathbf{g} = \ln g$. Un long calcul donne

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta} = & \frac{1}{2}\partial_{\alpha\beta}^2[\rho_{\alpha} + \rho_{\beta} - \rho] + \frac{1}{4}(\partial_{\beta}\rho)(\partial_{\alpha}\rho_{\beta}) \\ & + \frac{1}{4}(\partial_{\alpha}\rho)(\partial_{\beta}\rho_{\alpha}) - \frac{1}{2}(\partial_{\alpha}\rho_{\beta})(\partial_{\beta}\rho_{\alpha}) - \frac{1}{4}\sum_{\gamma}(\partial_{\beta}\rho_{\gamma})(\partial_{\alpha}\rho_{\gamma}) \\ & + \frac{\delta_{\alpha\beta}}{2}\sum_{\gamma}\frac{g_{\alpha}}{g_{\gamma}}\left[(\partial_{\gamma}\rho_{\alpha})(\partial_{\gamma}\rho_{\gamma}) - \frac{1}{2}\partial_{\gamma}^2\rho - \partial_{\gamma}^2\rho_{\alpha}\right], \end{aligned} \quad (3.100)$$

où $\rho_{\alpha} = \ln g_{\alpha}$, et $\rho = \sum_{\alpha} \rho_{\alpha}$. Il ne faut pas s'inquiéter du fait que g_{α} peut être négatif, car il apparaît toujours $\partial_{\beta}\rho_{\alpha} = \frac{\partial_{\beta}g_{\alpha}}{g_{\alpha}}$ qui est indépendant du signe de g_{α} .

L'équation d'Einstein est $R_{\alpha\beta} = \frac{R}{2}g_{\alpha}\delta_{\alpha\beta}$, donc

$$R = R_{\alpha}^{\alpha} = \sum_{\alpha} \frac{1}{g_{\alpha}} R_{\alpha\alpha} = \frac{R}{2} \sum_{\alpha} 1. \quad (3.101)$$

A 4 dimensions, on a alors $R = 0$, et donc l'équation d'Einstein devient dans le cas d'une métrique diagonale $R_{\alpha\beta} = 0$, donc $R = 0$. Appliqué à notre métrique, le résultat donne pour $R_{\alpha\beta}$

$$R_{\varphi 0} = R_{\varphi r} = R_{\varphi \theta} = R_{\theta r} = R_{\theta 0} = 0, \quad (3.102)$$

$$R_{0r} = \frac{1}{r} \partial_0 \rho_r, \quad (3.103)$$

et donc puisque $\partial_0 \rho_r = 0$,

$$R_{rr} = -\frac{1}{2} \partial_r^2 \rho_0 - \frac{1}{4} (\partial_r \rho_0)^2 + \frac{1}{4} (\partial_r \rho_r) \partial_r (\rho_0 + \ln r^4) \quad (3.104)$$

$$R_{00} = \frac{g_0}{4g_r} \left[\partial_r (\rho_r - \rho_0 - \ln r^4) (\partial_r \rho_0) - 2\partial_r^2 \rho_0 \right] \quad (3.105)$$

$$R_{\varphi\varphi} = \sin^2 \theta R_{\theta\theta} \quad (3.106)$$

$$R_{\theta\theta} = 1 + \frac{1}{g_r} \left[1 - \frac{r}{2} \partial_r (\rho_r - \rho_0) \right]. \quad (3.107)$$

Insérons

$$\partial_r^2 \rho_0 = \frac{1}{2} \partial_r (\rho_r - \rho_0 - \ln r^4) (\partial_r \rho_0) \quad (3.108)$$

dans l'expression de R_{rr}

$$R_{rr} = \frac{1}{r} \partial_r (\rho_0 + \rho_r) = 0. \quad (3.109)$$

Alors

$$R_{\theta\theta} = \frac{d}{dr} \left[r + \frac{r}{g_r} \right] = 0, \quad (3.110)$$

et

$$g_0 = -\frac{a(t)}{g_r}, \quad g_r^{-1} = -1 + \frac{r_s}{r}. \quad (3.111)$$

(3.108) est alors automatiquement satisfaite car elle s'écrit, en utilisant (3.109),

$$\frac{d}{dr} \left[\ln \left(\frac{d}{dt} \ln g_r \right) - \ln g_r + \ln r^2 \right] = 0. \quad (3.112)$$

Nous pouvons introduire une nouvelle variable x^0 par

$$dx^0 = \sqrt{a(t)} dt, \quad (3.113)$$

de sorte que la *métrique de Schwarzschild* devienne

$$ds^2 = (dx^0)^2 \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta (d\varphi)^2) \quad (3.114)$$

Nous avons prouvé un théorème de Birkhoff : une métrique de symétrie sphérique solution de l'équation d'Einstein

$$R_{\alpha\beta} - \frac{R}{2} g_{\alpha\beta} = 0, \quad (3.115)$$

est stationnaire et statique (pas d'onde gravitationnelle émise).

Expliquons les termes.

- *Stationnaire*. Il existe un système de coordonnées où le temps (x^0 si $r > r_s$) n'apparaît pas explicitement dans $g_{\alpha\beta}$.
- *Statique*. Invariante par renversement du temps $x^0 \rightarrow -x^0$. Pas de terme mixte $dx^0 dx^i$.

Statique est plus fort que stationnaire. Par exemple, pour un faible champ électrique sur un métal, l'état stationnaire ne correspond pas à l'état d'équilibre (statique).

Le résultat est surprenant. Même si l'étoile voit son rayon ou sa densité varier avec le temps, à l'extérieur le potentiel gravifique est statique. Il n'existe pas d'analogue en théorie newtonienne, où $\phi = -GM(t)/r$ à l'extérieur. Notons que si $r \rightarrow \infty$ (loin de l'étoile), la métrique tend vers la métrique plate de Minkowski.

Que vaut r_s ? Dans la limite newtonienne, on a vu que la métrique avait

$$(dx^0)^2 \left(1 + \frac{2\phi}{c^2}\right), \quad (3.116)$$

où ϕ est le potentiel gravifique. On a le théorème de Newton. Si ρ est de symétrie sphérique et de support compact, à l'extérieur de son support $\Delta\phi = 4\pi G\rho$ est donné par $\phi = -GM/r$, avec

$$M = \int \rho(r) d^3r \quad (3.117)$$

la masse totale. Nous prendrons donc

$$r_s = \frac{2GM}{c^2} \quad (3.118)$$

qui est le *rayon de Schwarzschild*.

Système	Masse [kg]	Rayon r [m]	r_s [m]	r_s/r
Noyau atomique	10^{-26}	10^{-15}	10^{-53}	10^{-38}
Homme	10^2	1	10^{-25}	10^{-25}
Terre	$6 \cdot 10^{24}$	$6 \cdot 10^6$	$9 \cdot 10^{-3}$	10^{-9}
Soleil	$2 \cdot 10^{30}$	$7 \cdot 10^8$	$3 \cdot 10^3$	$4 \cdot 10^{-6}$
Naine blanche	$2 \cdot 10^{30}$	10^7	$3 \cdot 10^3$	$3 \cdot 10^{-4}$
Etoile à neutrons	$2 \cdot 10^{30}$	10^4	$3 \cdot 10^3$	$3 \cdot 10^{-1}$
Galaxie	10^{41}	10^{21}	10^{14}	10^{-7}

TAB. 3.1: Rayon de Schwarzschild r_s de quelques systèmes physiques connus.

Coordonnées isotropes : un changement de variables $r \rightarrow \rho$, $r > r_s$,

$$r = \rho \left(1 + \frac{r_s}{4\rho} \right)^2 \quad (3.119)$$

transforme la métrique en

$$ds^2 = \left(\frac{1 - \frac{r_s}{4\rho}}{1 + \frac{r_s}{4\rho}} \right)^2 (dx^0)^2 - \left(1 + \frac{r_s}{4\rho} \right)^4 d\mathbf{x}^2, \quad (3.120)$$

qui permet de retrouver de manière plus intuitive la métrique newtonienne.

A l'évidence r_s fixe l'échelle de la métrique et il y a un problème lorsque $r = 0$ ou $r = r_s$. Le tableau 3.1 montre les valeurs de $\frac{r_s}{r}$ pour différents systèmes. On voit que R est tel que $\frac{R}{r} \ll 1$ pour la plupart des distances habituelles.

3.8 Géodésiques dans la métrique de Schwarzschild

Pour une métrique diagonale, on a

$$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = \frac{1}{2} \left[\delta_{\beta\alpha} \partial_\gamma \ln g_\alpha + \delta_{\gamma\alpha} \partial_\beta \ln g_\alpha - \frac{\partial_\alpha g_\beta}{g_\alpha} \delta_{\beta\gamma} \right], \quad (3.121)$$

donc dans notre cas

$$\ddot{x}^0 + \dot{x}^0 \dot{r} \frac{d}{dr} \ln g_0 = 0 \quad (3.122)$$

$$\ddot{\phi} + \dot{\phi} \left[\dot{r} \frac{d}{dr} \ln r^2 + \dot{\theta} \frac{d}{d\theta} \ln \sin^2 \theta \right] = 0 \quad (3.123)$$

$$\ddot{\theta} + \dot{\theta} \dot{r} \left[\frac{d}{dr} \ln r^2 \right] - \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 \frac{d}{d\theta} \sin^2 \theta = 0. \quad (3.124)$$

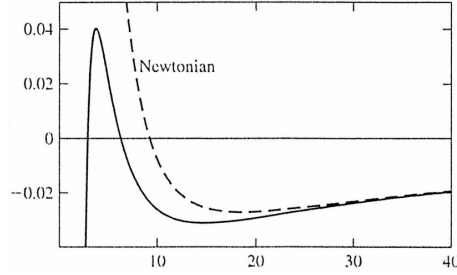


FIG. 3.3: Le potentiel effectif du mouvement radial dans les cas relativiste et newtonien.

Les relations (3.122) et (3.123) donnent les lois de conservation

$$a = \dot{x}^0 g_0 \quad (3.125)$$

$$l = \dot{\varphi} r^2 \sin^2 \theta. \quad (3.126)$$

Multipliant (3.124) par r^4 et utilisant (3.123), on trouve une troisième constante du mouvement

$$L^2 = (r^2 \dot{\theta})^2 + \frac{l^2}{\sin^2 \theta}, \quad (3.127)$$

où l représente le moment angulaire selon l'axe z et L^2 la longueur du moment angulaire total. Ces constantes du mouvement montrent que le mouvement a lieu dans le plan d'équation

$$\sqrt{L^2 - l^2 \sin^2 \theta} \cos(\varphi - \varphi_0) - l \cos \theta = 0. \quad (3.128)$$

L'analogie avec la situation newtonienne est frappante. L'équation analogue à la conservation de l'énergie est

$$\delta = \frac{a^2}{g_0} - \frac{1}{g_0} \dot{r}^2 - \frac{L^2}{r^2}, \quad (3.129)$$

avec

$$g_0 = 1 - \frac{r_s}{r}. \quad (3.130)$$

$\delta = 1$ pour une particule test de masse non nulle, $\dot{r} = \frac{dr}{cd\tau}$. $\delta = 0$ pour un rayon lumineux $\dot{r} = \frac{dr}{d\lambda}$, avec λ le paramètre affine.

Récrivons (3.129) sous la forme

$$\dot{r}^2 + V_\delta(r) = E_\delta, \quad (3.131)$$

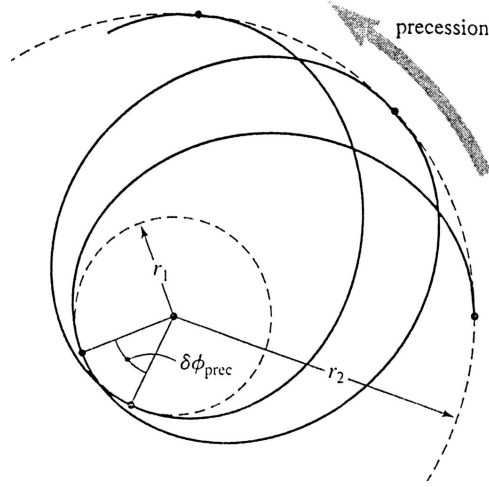


FIG. 3.4: Forme d'une orbite liée autour d'une étoile circulaire. Dans la figure est représenté le plan orbital d'une orbite liée dont le mouvement radial est du type correspondant au deuxième cas de la figure 3.5. La planète évolue entre un rayon minimal r_1 et un rayon maximal r_2 . Contrairement à l'ellipse Keplerienne de la mécanique de Newton, l'orbite n'est pas fermée. En effet, la position angulaire de la distance minimale est décalée à chaque retour par un angle appelé *précession du périhélie* ($\delta\phi_{\text{prec}}$ dans la figure).

avec

$$V_\delta = -\frac{\delta r_s}{r} + \frac{L^2}{r^2} - \frac{L^2 r_s}{r^3}, \quad (3.132)$$

et $E_\delta = a^2 - \delta$. Dans le cas newtonien, on avait, pour une particule test de masse m , avec $dt = d\tau$,

$$\frac{2E}{mc^2} = \dot{r}^2 - \frac{r_s}{r} + \frac{K^2}{c^2 r^2}, \quad (3.133)$$

K^2 étant le moment angulaire au carré. La correction relativiste est donc dans le terme $\frac{L^2 r_s}{r^3}$. Selon la valeur de E_1 , une particule soumise au potentiel effectif $V_1(r)$ va présenter des comportements distincts, comme illustré dans la figure 3.5.

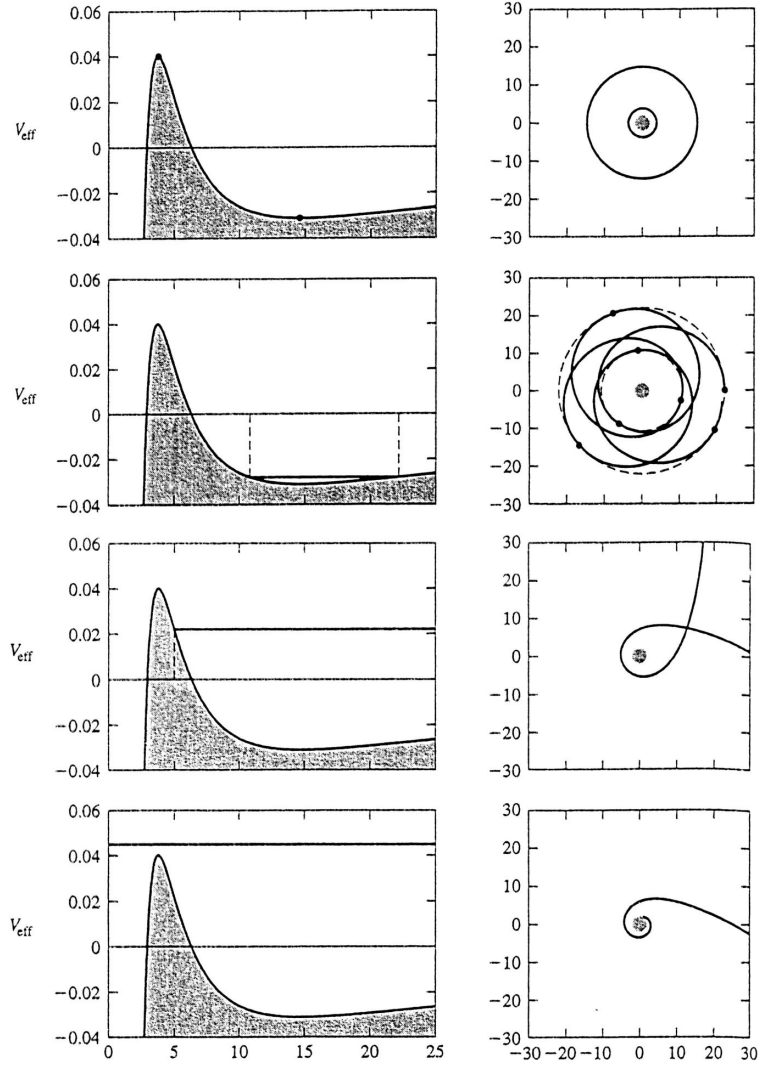


FIG. 3.5: Quatre types d'orbites en géométrie de Schwarzschild. A gauche sont représentés le potentiel effectif $V_1(r)$ (V_{eff} sur les figures) avec r/m en abscisse) pour différentes valeurs de E_1 . Les lignes horizontales indiquent les valeurs de E_1 . Les lignes verticales indiquent les points de rebroussement. Les points indiquent les positions possibles des orbites circulaires. A droite sont représentées les orbites correspondantes (graphe polaire (r, φ)). Le centre des graphes correspond à $r < 2m$. La première figure contient deux orbites circulaires, l'extérieure étant stable, l'intérieure instable. La deuxième figure contient un état lié, c'est-à-dire que $r_- < r < r_+$. La troisième contient un état de diffusion : la particule peut venir de l'infini et y être renvoyée. La dernière figure peut venir de l'infini et être piégée par l'origine ; ce type d'orbite n'est pas possible dans un potentiel central en mécanique newtonienne

3.9 Etat lié. Précession du périhélie des planètes.

Examinons maintenant le cas d'une planète ($\delta = 1$) dans un état lié. Nous prendrons comme variable sans dimensions

$$u = \frac{r_s}{r}, \quad (3.134)$$

et pour simplifier, nous considérerons le mouvement dans le plan $\theta = \pi/2$ ($L = l$); il s'effectuera entre les valeurs $u_- \leq u \leq u_+$: $E_1 = V_1(u_{\pm})$. $r(\tau)$ variera de manière périodique avec une période T entre son minimum et son maximum. L'équation

$$\dot{\varphi} = \frac{l}{r^2(\tau)} \quad (3.135)$$

donnera pour φ une solution périodique avec une autre période T' . Le rapport T/T' ne sera pas rationnel, autrement dit le mouvement sera quasi-périodique et *les trajectoires ne seront plus fermées* (un miracle du potentiel $1/r$ dans la théorie de Newton : $1/r^\alpha$, $\alpha = 1.002$ donnerait également un mouvement quasi-périodique). Lorsque la correction relativiste est petite, ce phénomène peut s'interpréter comme une précession du périhélie de la planète newtonienne (voir figure 3.4). $\Delta\varphi$ est la variation du périhélie après un tour. Pour calculer $\Delta\varphi$, nous procédons de la manière suivante. L'équation de la trajectoire s'obtient en divisant l'équation (3.131) par l'équation (3.135) pour φ

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = \frac{r_s^2}{l^2}(a^2 - 1) + \frac{r_s^2}{l^2}u - u^2 + u^3, \quad (3.136)$$

que nous écrivons sous la forme

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = (\alpha - u)(\beta - u)(u - \gamma), \quad (3.137)$$

avec $\alpha > \beta > \gamma$ et $\alpha + \beta + \gamma = 1$. Nous sommes dans la situation $u_+ = \beta > u > \gamma = u_-$. Si la planète revenait sur elle-même au bout d'un tour on aurait $2[\varphi(u_-) - \varphi(u_+)] = 2\pi$ donc

$$2\pi + \Delta\varphi = 2 \int_{\gamma}^{\beta} \frac{du}{[(\alpha - u)(\beta - u)(u - \gamma)]^{1/2}} \quad (3.138)$$

Soit

$$2\pi + \Delta\varphi = \frac{2}{[1 - \frac{3}{2}(\beta + \gamma)]^{1/2}} \int \frac{ds}{[(1 - s^2)(1 - \kappa s)]^{1/2}}, \quad (3.139)$$

avec

$$\kappa = \frac{\frac{1}{2}(\beta - \gamma)}{1 - \frac{3}{2}(\beta + \gamma)} \ll 1. \quad (3.140)$$

Mais

$$\beta = \frac{r_s}{r_{\min}} \ll 1, \quad \gamma = \frac{r_s}{r_{\max}} \ll 1 \quad (3.141)$$

$$\Delta\varphi = 2\pi\frac{3}{4}(\beta + \gamma) + \mathcal{O}(\beta^2), \quad (3.142)$$

ce qui donne, en exprimant $r_{\min}$ et $r_{\max}$ à l'aide des caractéristiques Kepleriennes de l'ellipse ; a le demi-axe majeur, e l'excentricité

$$\boxed{\Delta\varphi = \frac{6\pi MG}{c^2 a(1 - e^2)}} \quad (3.143)$$

L'effet est maximal pour une planète proche de l'étoile (a petit) et de grande excentricité. Dans le système solaire, Mercure¹ est dans ce cas, et on trouve $\Delta\varphi = 43''$ d'arc par siècle. Ceci ne représente qu'un dixième de la précession (due aux autres planètes) ; voir figure 3.6.

Cette précession avait été mesurée par les astronomes du 19e siècle et demeurait inexpliquée. La théorie d'Einstein en fournit la première explication. Elle néglige le caractère non-sphérique du soleil. Vers 1960, on a essayé d'expliquer le résultat par cette non-sphéricité du soleil. Aujourd'hui toutefois, le résultat d'Einstein n'est plus contesté. En effet, depuis les mesures très précises faites sur le pulsar binaire de Hulse et Taylor qui donne une précession 4000 fois celle de Mercure, la théorie d'Einstein n'a plus de rival.

3.10 Déflexion et temps de retard de la lumière

Considérons maintenant le cas de la lumière $\delta = 0$. Le paramètre par rapport auxquelles les dérivées sont prises est quelconque. Les équations sont (dans le plan $\theta = \pi/2$),

$$\dot{r}^2 = a^2 - \frac{l^2}{r^2} \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \quad (3.144)$$

$$\dot{\varphi} = \frac{l}{r^2} \quad (3.145)$$

$$\dot{x}^0 = a \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} \quad (3.146)$$

¹Mercure. $a = 57.9 \cdot 10^9 \text{ m}$, $e = 0.2051$, 415 orbites par siècle.

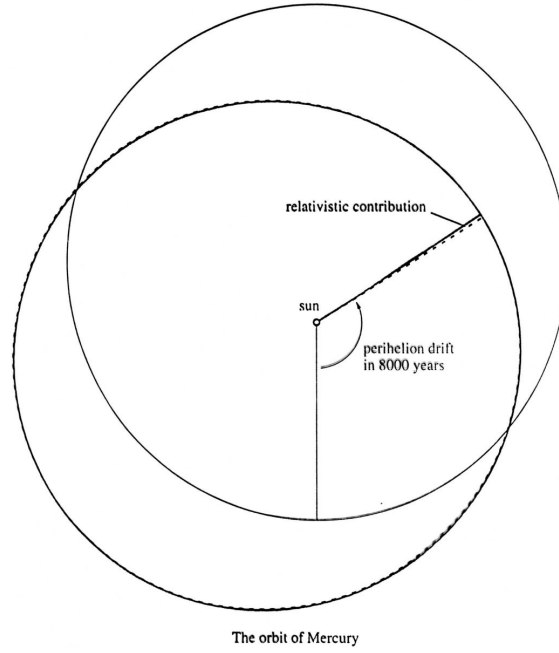


FIG. 3.6: L'orbite de Mercure. La contribution relativiste est petite par rapport à la contribution newtonienne (due aux autres planètes).

Considérons d'abord la situation suivante. Le rayon lumineux arrive de l'infini. Il part d'une hauteur b en $y = r \sin \varphi$, donc $\varphi = \frac{b}{r}$ si $r \gg b$. Comme $\dot{r} = -a$, dans ce cas on voit que

$$ba = l. \quad (3.147)$$

Si la lumière se propageait en ligne droite, le photon irait à l'infini, formant l'angle π avec l'axe des x . La lumière étant défléchi l'angle final sera $\pi + \Delta\varphi$ (voir figure 3.7). L'équation de la trajectoire étant – divisant (3.144) par (3.145) au carré,

$$\left(\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\varphi} \right)^2 = \frac{1}{l^2} \left[a^2 - \frac{l^2}{r^2} \left(1 - \frac{r_s}{r} \right) \right]. \quad (3.148)$$

La distance minimale r_0 sera donnée par

$$a^2 = \frac{l^2}{r_0^2} \left(1 - \frac{r_s}{r_0} \right). \quad (3.149)$$

Choisissons donc les unités r_0 . Si $u = \frac{r_0}{r}$, l'équation devient

$$\left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 = 1 - \delta - u^2 + \delta u^3, \quad (3.150)$$

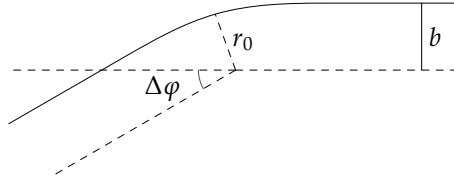


FIG. 3.7: Déflexion de la lumière par une masse. Le rayon lumineux part d'une hauteur b , est défléchi par la masse, et après passage formera un angle $\pi + \Delta\varphi$ avec l'horizontale.

si $\delta = \frac{r_s}{r_0}$. Comme

$$\pi + \Delta\varphi = 2 \int_{r_0}^{\infty} dr \frac{d\varphi}{dr}, \quad (3.151)$$

on a

$$\begin{aligned} \pi + \Delta\varphi &= 2 \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1 - \delta - u^2 + \delta u^3}} \\ &= 2 \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u} \sqrt{1+u - \delta(1+u+u^2)}} \end{aligned} \quad (3.152)$$

mais $\delta \ll 1$, donc

$$\frac{\pi}{2} + \frac{\Delta\varphi}{2} = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} \left[1 + \frac{\delta}{2} \frac{1+u+u^2}{1+u} \right] + \mathcal{O}(\delta^2), \quad (3.153)$$

d'où $\Delta\varphi = 2\delta + \mathcal{O}(\delta^2)$, mais (3.149) donne, combiné avec (3.147),

$$\frac{r_0}{b} = \sqrt{1 - \delta}, \quad (3.154)$$

d'où

$$\boxed{\Delta\varphi = \frac{4MG}{c^2 b}} \quad (3.155)$$

Pour la lumière rasant le soleil b est proche du rayon du soleil, et $\Delta\varphi = 1.7''$, ce qui a été vérifié lors d'éclipses (Eddington, ...). Notons que si on avait traité la lumière comme décrivant une particule de masse $m = 0^+$, venant avec vitesse c de l'infini, on aurait trouvé dans la théorie newtonienne une déflexion, mais d'angle moitié du résultat de la relativité générale.

On peut également obtenir ce résultat en traitant la lumière comme une onde, décrite par les équations de Maxwell avec la métrique de Schwarzschild dans la limite de l'optique géométrique (courtes longueurs d'onde). C'était l'approche d'Einstein.

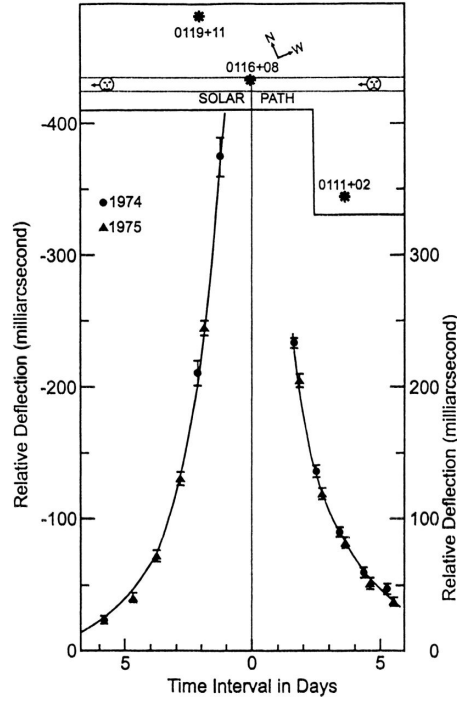


FIG. 3.8: Déflexion de la lumière d'une source radio 0116+08 comme fonction du temps. La partie supérieure de la figure représente l'évolution du soleil et la position relative des trois sources radio impliquées. La partie inférieure représente les données expérimentales de la déflexion des ondes radio. La ligne correspond aux prédictions de la relativité générale.

Une conséquence de cette déflexion est l'existence de *lentilles gravitationnelles*. La lumière pouvant suivre plusieurs chemins pour parvenir à un observateur en passant près d'une masse importante. D'où l'existence de plusieurs images de la source de lumière pour l'observateur. C'est un outil important de l'astronomie moderne.

Un autre effet de la relativité générale important est le *temps de retard de la lumière*, dans une expérience d'écho, proposée et effectuée par Shapiro.

Soit une masse M centrée en 0. Un émetteur à distance r_1 de lui émet une onde radar qui est reçue en r_2 puis renvoyée en r_1 . Il s'agit de calculer le temps Δt mis pour la lumière pour effectuer ce parcours. Si $t(r, r')$ représente le temps pour aller de r' à r .

$$\Delta t = 2t(r_2, r_0) + 2t(r_1, r_0), \quad (3.156)$$

r_0 étant la distance minimale à la masse centrale sur le trajet. Mais (3.146) et (3.144) combinés donnent

$$c \frac{dt}{dr} = \pm \frac{a}{1 - \frac{r_s}{r}} \frac{1}{\sqrt{a^2 - \frac{l^2}{r^2} \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)}}. \quad (3.157)$$

Utilisant à nouveau l'unité de longueur r_0 et l'équation (3.149) on a

$$t(r, r_0) = \frac{r_0 \sqrt{1 - \delta}}{c} \int_1^{r/r_0} dx \left[\left(1 - \frac{\delta}{x}\right) \left[1 - \frac{1}{x^2} + \delta \left(\frac{1}{x^3} - 1\right)\right]^{1/2} \right]^{-1}. \quad (3.158)$$

Comme $\delta \ll 1$, on calcule cette expression au plus bas ordre en δ

$$\boxed{t(r, r_0) = \frac{\sqrt{r^2 - r_0^2}}{c} + \frac{r_s}{r} \left[\ln \left[\frac{r^2}{r_0} + \frac{1}{r_0} \sqrt{r^2 - r_0^2} \right] + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{r - r_0}{r + r_0}} \right]} \quad (3.159)$$

Le premier terme donne le résultat pour la lumière se propageant en ligne droite. Le deuxième donne la correction relativiste. Pratiquement, le centre est le Soleil, l'émetteur la Terre, et le récepteur une planète (Mars, par exemple). r_0 est proche du Soleil, donc $\frac{r}{r_0} \gg 1$, et la correction relativiste est essentiellement

$$\boxed{(\Delta t)_{\text{rel}} \simeq \frac{4GM}{c^3} \left[1 + \log \frac{4r_2 r_1}{r_0^2} \right]} \quad (3.160)$$

On a mesuré la dépendance de Δt en r_0 qui varie avec le temps, puisque les planètes émettrices et réceptrices bougent, et on obtient $\Delta t_{\text{max,rel}} \simeq 274 \mu\text{s}$. (Voir figures 3.8 et 3.9).

D'une manière générale, les prédictions de la relativité générale se décrivent de la manière suivante. La métrique étant caractérisée par g_0 et g_r ,

$$g_0 = 1 - \frac{r_s}{r} + \frac{1}{2}(\beta - \gamma) \left(\frac{r_s}{r} \right)^2 + \dots \quad (3.161)$$

$$-g_r = 1 + \gamma \frac{r_s}{r}, \quad (3.162)$$

avec $\beta = \gamma = 1$. Ces valeurs sont vérifiées par l'ensemble des expériences à $2 \cdot 10^{-3}$ près.

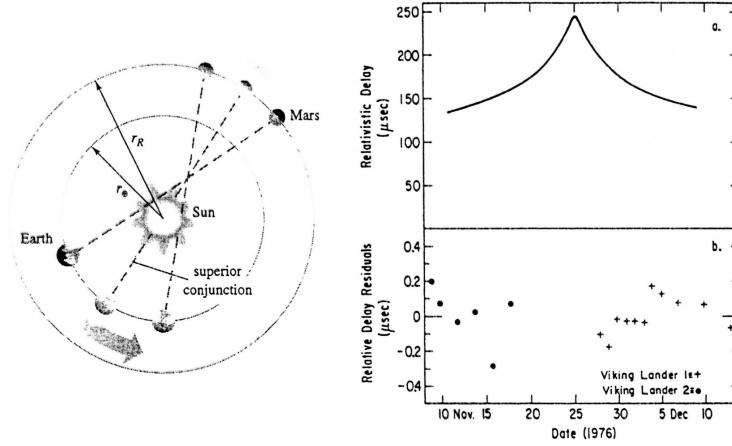


FIG. 3.9: Mesure du décalage temporel de lumière, entreprise sur la mission Viking Mars. Un signal radar envoyé de Terre est renvoyé par Viking sur Mars, et la différence entre les temps de retour et d'émission est relevé comme fonction du temps. La figure à gauche représente la configuration des planètes lors de l'expérience. Proche de la conjonction supérieure, le 26 novembre 1976, les signaux passaient près du Soleil, et les effet relativistes ont pu être précisément mesurés. Noter que les signaux n'ont pas été bloqué par le Soleil, de par le fait que les orbites de Mars et de la Terre ne se situent pas tout à fait dans le même plan. La figure à droite représente le décalage en fonction du temps. Les mesures correspondent bien aux prévisions de la relativité générale.

3.11 Déplacement vers le rouge gravitationnel

Considérons la situation suivante. Un observateur au repos, situé en x_1 envoie au temps t_1 , puis $t_1 + \Delta t_1$ un photon qui parvient à un autre observateur situé en x_2 , aux temps t_2 et $t_2 + \Delta t_2$, comme représenté dans la figure 3.11. On veut déterminer la relation entre les temps propres $\Delta\tau_1$ et $\Delta\tau_2$ correspondant à Δt_1 et Δt_2 . Supposons que la métrique soit statique

$$ds^2 = g_0(x)(dx^0)^2 - g_{ij}(x)dx^i dx^j, \quad (3.163)$$

alors

$$c(t_2 - t_1) = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} d\lambda \sqrt{\frac{g_{ij}(x(\lambda))}{g_0}} \dot{x}^i \dot{x}^j. \quad (3.164)$$

Cette grandeur ne dépend que du chemin, qui va de x_1 à x_2 , non de la paramétrisation λ que l'on pourrait choisir comme l'abscisse curviligne de la courbe qui rejoint x_1 à x_2 . Donc

$$c[t_2 + \Delta t_2 - (t_1 + \Delta t_1)] = c(t_2 - t_1), \quad (3.165)$$

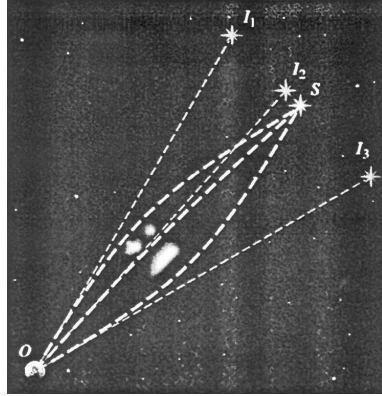


FIG. 3.10: Lentille gravitationnelle. La masse entre la source S et l'observateur O peut défléchir la lumière, et ainsi produire plusieurs chemins entre S et O . Le diagramme illustre comme l'observateur voit la lumière comme provenant des sources virtuelles I_1 - I_3 .

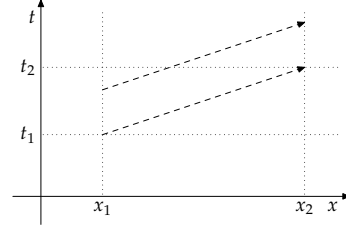


FIG. 3.11: Déplacement vers le rouge gravitationnel. Un observateur au repos en x_1 envoie au temps t_1 puis $t_1 + \Delta t_1$ un photon parvenant à un autre observateur en x_2 en t_2 et $t_2 + \Delta t_2$.

d'où $\Delta t_1 = \Delta t_2$. Mais

$$\Delta \tau_j = \sqrt{g_0(x_j)} \Delta t_j, \quad (3.166)$$

donc

$$\frac{\Delta \tau_j}{\Delta \tau} = \sqrt{\frac{g_0(x_j)}{g_0(x)}}. \quad (3.167)$$

Donc une source de fréquence ω_1 en x_1 est reçue avec une fréquence ω_2 en x_2

$$\omega_2 = \omega_1 \sqrt{\frac{g_0(x_1)}{g_0(x_2)}}. \quad (3.168)$$

La métrique de Schwarzschild est statique ainsi que celle des champs faibles

$$\omega_2 = \omega_1 \sqrt{\frac{1 + \frac{2\phi_1}{c^2}}{1 + \frac{2\phi_2}{c^2}}}. \quad (3.169)$$

Si $\phi_1 > \phi_2$, $\omega_2 < \omega_1$ et on a un déplacement vers le rouge du signal reçu. Au plus bas ordre,

$$\boxed{\frac{\omega_2}{\omega_1} - 1 = \frac{\phi_1 - \phi_2}{c^2}} \quad (3.170)$$

Pour l'instant, c'est cette relation qui a été testée. Pour certaines raies émises du Soleil, $(\phi_1 - \phi_2)/c^2 \simeq 2 \cdot 10^{-6}$ ou de l'étoile Sirius. En 1960,

Pound et Rebka l'ont testée sur Terre, à Harvard, en comparant deux horloges atomiques au bas et en haut d'une tour,

$$\frac{\phi_1 - \phi_2}{c^2} = \frac{gh}{c^2}, \quad h = 22.5 \text{ m} \quad (3.171)$$

Depuis, on a mesuré l'effet avec des ondes radio d'un satellite envoyé vers Saturne. Il faut toutefois remarquer qu'au plus bas ordre, on ne teste que le principe d'équivalence et non la relativité générale généralement, car Einstein avait prédit l'effet sur cette base avant la relativité générale. Pour un photon dans la métrique de Schwarzschild, on a

$$\omega_\infty = \omega_r \sqrt{1 - \frac{r_s}{r}} \quad (3.172)$$

Cette relation va être utile dans ce qui suit.

3.12 Géométrie de l'espace-temps de Schwarzschild. Trous noirs.

La gravitation étant une force attractive, pour qu'une étoile reste en équilibre, il faut qu'une pression interne suffisante s'exerce. Son origine est diverse (réactions nucléaires, pression des électrons ou neutrons due au principe de Pauli). La résolution de l'équation d'Einstein à l'intérieur de l'étoile montre qu'une étoile à neutrons, étape ultime de l'évolution stellaire ne peut supporter une masse supérieure à γM_{soleil} , $\gamma = 2-4$, son rayon étant de l'ordre de 10km, la densité au centre étant de l'ordre 10^{15} g/cm^3 . Au-delà, l'étoile s'effondre et son rayon devient plus petit que le rayon de Schwarzschild et elle devient un *trou noir*.

Il nous faut donc considérer la solution de Schwarzschild quand $r < r_s$. A la surface de l'étoile, la pression est nulle et l'on peut donc considérer qu'un observateur situé sur elle suit un mouvement géodésique radial ($\dot{\phi} = 0$, $a = 1$ si on part de l'infini, avec $\dot{r} = 0$).

$$\dot{r}^2 = \frac{r_s}{r} \quad (3.173)$$

et donc

$$\tau - \tau_0 = \frac{2}{3c\sqrt{r_s}} \left(r_0^{3/2} - r^{3/2} \right). \quad (3.174)$$

Il n'y a aucune singularité en $r = r_s$. Partant de $r = r_s$, r tend vers 0 en un temps propre $2r_s/3c \simeq 10^{-5} \text{ s}$. Par contre on peut montrer que le temps coordonnée diverge en $r = r_s$. Ceci est naturel puisque le signe de g_0 change quand r passe par la valeur r_s

$$\frac{r(\tau)}{r_s} = \left(\frac{3}{2} \right)^{2/3} \left(\frac{c\tau_* - c\tau}{r_s} \right)^{2/3} \quad (3.175)$$

de sorte que dès que $\frac{r}{r_s} = 1$, $r(\tau)$ atteint la valeur $r(0)$ en un temps propre $\frac{2r_s}{3c}$ ($\sim 10^{-5}$ s). r/r_s est une singularité artificielle due au mauvais choix de coordonnées. Ceci est suggéré par le fait que les scalaires

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{12r_s^2}{r^6}, \quad (3.176)$$

et

$$\det g = r^4 \sin^2 \theta, \quad (3.177)$$

ne voient qu'une singularité $r = 0$ et $\theta = 0, \pi$ pour (3.176) et $r = 0$, $\theta = 0, \pi$ pour (3.177), de sorte que $g^{\alpha\beta}$ est singulier. La singularité en $\theta = 0, \pi$ vient également d'un mauvais choix de coordonnées pour la sphère, facilement réparé : il faut deux cartes au moins pour décrire S^2 . Une carte (θ, φ) ne suffit pas. Ceci suggère que dans notre cas également il faudra plusieurs cartes pour décrire l'espace-temps de Schwarzschild et trouver un bon système de coordonnées. La solution de ce problème a été apportée en 1960 par Kruskal et, indépendamment, Szekeres.

Soient les coordonnées de Kruskal-Szekeres.

$$r > r_s : \quad u = \sigma \left(\frac{r}{r_s} - 1 \right)^{1/2} e^{r/2r_s} \cosh \frac{x^0}{2r_s} \quad (3.178)$$

$$v = \sigma \left(\frac{r}{r_s} - 1 \right)^{1/2} e^{r/2r_s} \sinh \frac{x^0}{2r_s} \quad (3.179)$$

$$r < r_s : \quad u = \sigma \left(1 - \frac{r}{r_s} \right)^{1/2} e^{r/2r_s} \sinh \frac{x^0}{2r_s} \quad (3.180)$$

$$v = \sigma \left(1 - \frac{r}{r_s} \right)^{1/2} e^{r/2r_s} \cosh \frac{x^0}{2r_s}, \quad (3.181)$$

avec $\sigma = \pm 1$. Dans ces coordonnées, la métrique devient

$$ds^2 = \frac{4r_s^3}{r} e^{-r/2r_s} [dv^2 - du^2] - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (3.182)$$

Ici, r est donné comme fonction de (u, v) par l'équation

$$\left(\frac{r}{r_s} - 1 \right) e^{r/r_s} = u^2 - v^2. \quad (3.183)$$

On voit qu'il n'y a plus de singularité en $r = r_s$, seulement en $r = 0$.

L'espace (v, u) est partagé en quatre domaines par un cône d'équation $|v| = |u|$

$$\begin{aligned} \text{I} : & \quad r > r_s, \quad \sigma = +1 \\ \text{I}' : & \quad r > r_s, \quad \sigma = -1 \\ \text{II} : & \quad r < r_s, \quad \sigma = +1 \\ \text{II}' : & \quad r < r_s, \quad \sigma = -1, \end{aligned}$$

voir figures 3.13 et 3.14. Notant qu'un point de ce diagramme représente une sphère S^2 . v est une coordonnée temporelle, (u, θ, φ) sont des coordonnées spatiales. La droite $u = v$, correspondant à $r_s = r$, $x^0 = \infty$, s'appelle l'*horizon de Schwarzschild*.

Il y a deux singularités correspondant à $r = 0$. Ce sont des surfaces de type espace données par les équations $v^2 - u^2 = 1$, et $v > 0$ ou $v < 0$. Ce sont deux hyperboles.

Ces coordonnées sont particulièrement utiles pour décrire les géodésiques nulles que suivent les rayons lumineux $((\theta, \varphi)$ fixés).

$$ds^2 = 0 \Leftrightarrow d(v \pm u) = 0. \quad (3.184)$$

Ce sont donc des droites formant un angle de 45° avec l'axe v .

Localement, on a donc une structure analogue à l'espace de Minkowski à deux dimensions, avec un cône de lumière.

Un rayon lumineux partant dans la région II n'en sort pas. Il va soit vers l'horizon, soit vers $r = 0$. La lumière est piégée dans cette région. C'est un *trou noir*. Dans II', c'est le contraire. Les rayons sortent; c'est un *trou blanc*.

Une particule test, dans I, a une ligne d'univers à l'intérieur des cônes, elle aussi est donc forcément conduite vers la singularité si elle s'approche de $r = r_s$. Supposons qu'elle représente la surface d'une étoile qui s'effondre. Un observateur envoie des rayons lumineux à un second observateur immobile en $r = r_0 > r_s$, qui se trouve sur une hyperbole.

La figure 3.15 montre très bien que le signal lumineux envoyé de l'étoile mettra toujours plus de temps à parvenir à l'observateur extérieur, la fréquence ω reçue sera toujours plus déplacée vers le rouge, donc l'énergie des photons reçus sera toujours plus faible (voir (3.172)).

Autrement dit, quand l'étoile s'effondre, les signaux lumineux deviennent toujours plus faibles en intensité et sont reçus avec toujours plus de retard, jusqu'à ce que l'observateur sur l'étoile disparaisse de l'horizon, pour être dans un trou noir dont aucun rayon ne sort.

Tout ceci peut être décrit en ne considérant que les régions I et II.

Qu'en est-il de tout l'espace-temps formé des régions I' et II' également? Théoriquement au moins, on peut discuter cette extension de

l'espace-temps de Schwarzschild due à Kruskal (voir figure 3.12). Il y a deux espaces asymptotiquement plats I et I'. On peut passer de l'un à l'autre en se déplaçant sur une surface $\dot{v} = \text{cte}$ qui est une droite passant par l'origine dans le plan (u, v) . Si l'on fixe $\theta = \pi/2$, une surface de métrique

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\varphi^2, \quad r > r_s \quad (3.185)$$

peut se représenter en trois dimensions par un paraboloïde de révolution à deux nappes (les deux espaces asymptotiquement plats).

En partant de la nappe supérieure (I), r diminue et l'on descend dans la gorge pour ressortir dans la nappe inférieure (I'). En fait, quand le temps varie, la gorge se resserre, et on n'arrivera pas à passer sur l'autre nappe. D'où la conclusion que l'on peut se restreindre "pratiquement" aux régions I et II.

On pense avoir trouvé des trous noirs dans les étoiles binaires qui émettent des rayons X, et dans le centre des galaxies, en particulier la nôtre ($M \sim 3 \cdot 10^6 M_{\text{soleil}}$), en observant le mouvement des étoiles près du trou noir.

Remarque. Laplace (1798) avait prédit sur la base d'un argument classique l'existence de trous noirs.

Soit une particule de masse m soumise à un champ gravitationnel dû à une étoile de masse M . L'énergie est donnée par

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{MGm}{r}. \quad (3.186)$$

Si la particule s'échappe à l'infini avec une vitesse nulle, son énergie $E = 0$ à la surface de l'étoile de rayon r^* , sa vitesse sera donc $v_0^2 = 2MG/r^*$. Si cette particule est un photon de vitesse c et que $c < v_0$, la particule ne s'échappe pas. Donc la lumière ne sort pas si $r^* < r_s$.

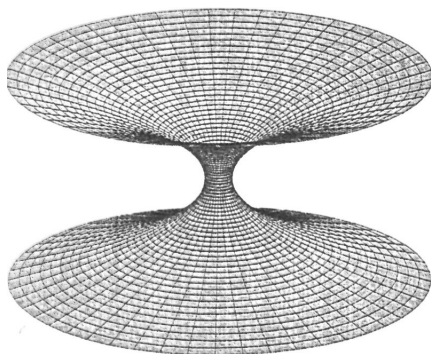


FIG. 3.12: L'extension de Kruskal à la géométrie de Schwarzschild.

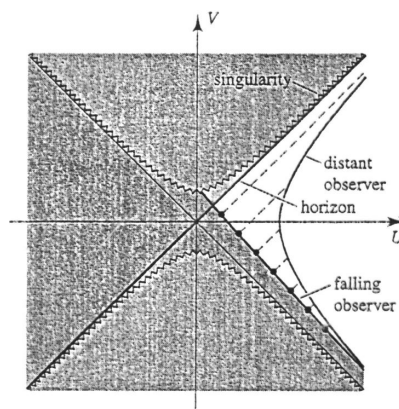


FIG. 3.13: Diagramme de Kruskal.

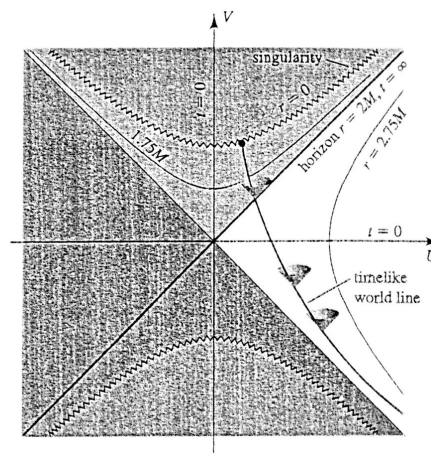
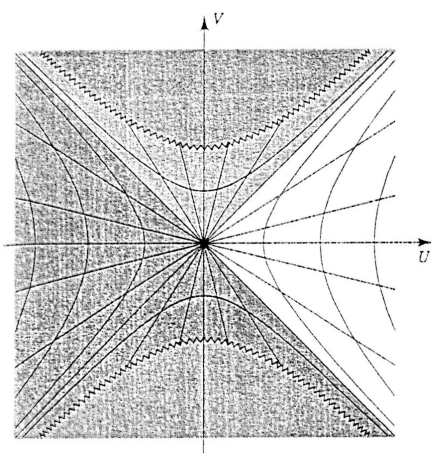


FIG. 3.14: Diagrammes de Kruskal. Les diagrammes sont des coupes bidimensionnelles de la géométrie de Schwarzschild définie par les coordonnées (u, v) de Kruskal-Szekeres. A gauche ; les courbes de niveaux pour différentes valeurs des coordonnées de Schwarzschild r (hyperboles) et t (droites).

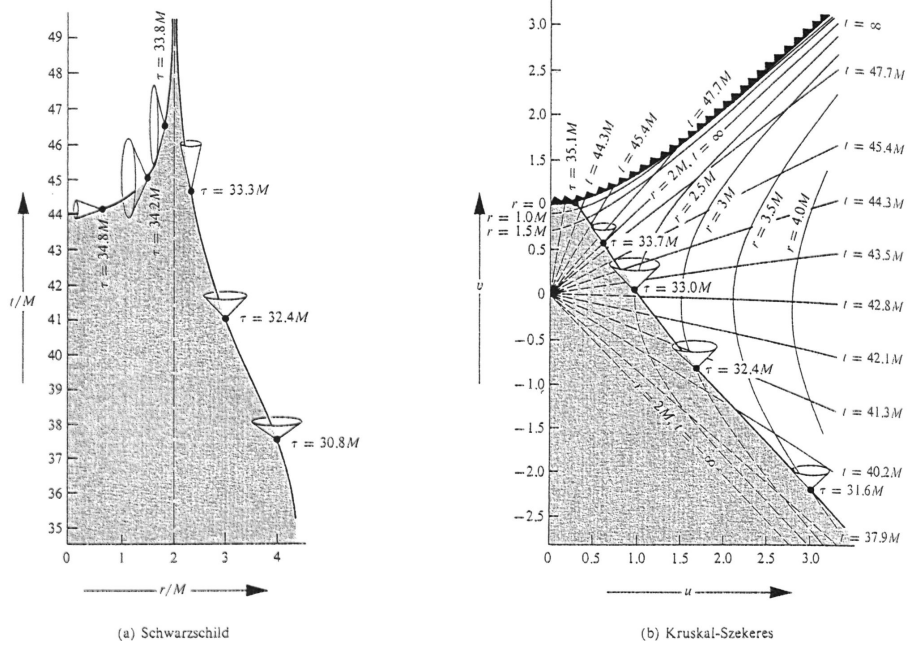


FIG. 3.15: Effondrement d'une étoile de rayon initial $R_i = 10M$, dans les coordonnées de (a) Schwarzschild, et (b) Kruskal-Szekeres. La région de l'espace-temps à l'intérieur de l'étoile est grisée.

Annexe A

Complément mathématique

Tenseurs

Soit E un espace vectoriel de dimension n , et E^* son dual (c'est-à-dire, l'ensemble des formes linéaires sur E). Pour $x \in E$ et $x^* \in E^*$, $x^*(x)$ est tel que

$$x^*(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 x^*(x_1) + \alpha_2 x^*(x_2). \quad (\text{A.1})$$

Soit $\{e_i\}$ une base de E , alors $x \in E$ s'écrit $x^i e_i$. Soit $\{\epsilon^{*i}\}$ une base de E^* , alors $x^* \in E^*$ s'écrit $x^* = x_i^* \epsilon^{*i}$. On a

$$x^*(x) = x^i x^*(e_i) = x^i x_j^* \epsilon^j(e_i) = x^i x_i^*, \quad (\text{A.2})$$

ayant défini $\epsilon^j(e_i) = \delta_i^j$. On dit que x est un *vecteur* et x^* un *covecteur*.

Soit maintenant

$$E^{(r,s)} = \underbrace{E \otimes \dots \otimes E}_{r \text{ fois}} \otimes \underbrace{E^* \otimes \dots \otimes E^*}_{s \text{ fois}}. \quad (\text{A.3})$$

On appelle *tenseur* (r, s) (r fois contravariant, s fois covariant) une forme multilinéaire sur $E^{(r,s)}$, autrement dit, une fonction

$$T(x(1), \dots, x(r), x^*(1), \dots, x^*(s)), \quad (\text{A.4})$$

des vecteurs $\{x(n)\}$ et covecteurs $\{x^*(m)\}$ linéaires dans chacun de ses arguments.

Le tenseur est déterminé par ses composantes dans les bases choisies

$$T_{i_1 \dots i_s}^{j_1 \dots j_r} = T(e_{i_1}, \dots, e_{i_s}, \epsilon^{j_1}, \dots, \epsilon^{j_r}). \quad (\text{A.5})$$

Pour un changement de base $e_i = b_i^{i'} e_{i'}$ et $e^j = a_{j'}^j e'^{j'}$, on voit que

$$T_{i_1 \dots i_s}^{j_1 \dots j_r} = a_{j_1'}^{j_1} \dots a_{j_r'}^{j_r} b_{i_1}^{i_1'} \dots b_{i_s}^{i_s'} T_{i_1' \dots i_s'}^{j_1' \dots j_r'}. \quad (\text{A.6})$$

Puisque $e^j(e_i) = \delta_i^j$, on a $a_k^j b_i^k = \delta_i^j$, les matrices a et b sont inverses.

Cas $E = E^* = \mathbb{R}^4$. En prenant les bases des coordonnées $\epsilon^i = dx^i$ et $e_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$, on a

$$a_{j'}^j = \frac{\partial x^j}{\partial x'^{j'}} \quad b_i^{i'} = \frac{\partial x'^{i'}}{\partial x^i}. \quad (\text{A.7})$$

Si T dépend de x , on obtient un *champ de tenseurs*, qui se transforme selon

$$T_{i_1 \dots i_s}^{j_1 \dots j_r}(x) = \prod_{m=1}^r \frac{\partial x^{j_m}}{\partial x'^{j'_m}} \prod_{p=1}^s \frac{\partial x'^{i'_p}}{\partial x^{i_p}} T_{i_1' \dots i_s'}^{j_1' \dots j_r'}(x(x')). \quad (\text{A.8})$$

Cette relation de transformation est une définition alternative d'un tenseur (r, s) .

Opérations sur les tenseurs

1. Produit de deux tenseurs (r, s) et $(m, n) \rightarrow$ tenseur $(r+m, s+n)$ dont les composantes sont données par

$$T_{i_1 \dots i_s}^{j_1 \dots j_r} S_{i_{s+1} \dots i_{s+n}}^{j_{r+1} \dots j_{r+m}}. \quad (\text{A.9})$$

2. Contraction des indices. Opération qui à partir d'un tenseur (r, s) , crée un tenseur $(r-1, s-1)$ de coordonnées

$$T_{i_1 \dots i_{s-1}}^{j_1 \dots j_{r-1}}, \quad (\text{A.10})$$

(on somme sur i).

Dans le cas de la relativité, $E = \mathbb{R}^4$. On note les indices par des lettres grecques $\alpha = 0, 1, 2, 3$, ou par des lettre latines $i = 1, 2, 3$ si l'on ne considère que les composantes spatiales.

Utilité en physique. Si on a une équation reliant des tenseurs, la forme de l'équation ne dépend pas des coordonnées choisies. Si on a, par exemple,

$$A_{i_1 \dots i_r}(x) F_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}(x) = B_{j_1 \dots j_s}(x), \quad (\text{A.11})$$

dans un autre système de coordonnées, on aura

$$A'_{i_1' \dots i_r'}(x(x')) F_{j_1' \dots j_s'}^{i_1' \dots i_r'}(x(x')) = B'_{j_1' \dots j_s'}(x(x')), \quad (\text{A.12})$$

(à vérifier). Les équations sont alors dites covariantes.

Nous considérons des espaces munis d'une métrique, soit d'un tenseur $(0,2)$ de composantes

$$g_{ij}(x) = g_{ji}(x), \quad (\text{A.13})$$

et tel que $\det g(x) \neq 0 \forall x$. Ce tenseur permet de relier E et E^* , ou plus généralement tenseur covariants et contravariants, en remontant ou descendant les indices.

Soit le tenseur $(2,0)$ inverse de g , de composantes g^{ij} , telles que $g^{ik}g_{kj} = \delta_j^i$. Si on prend, par exemple, le tenseur $(1,2)$ $F_{ij}^{i_1}$, on peut définir les nouveaux tenseurs

$$F^{i_1 k_1 k_2} = g^{k_1 j_1} g^{k_2 j_2} F_{j_1 j_2}^{i_1}, \quad (3,0), \quad (\text{A.14})$$

$$F_{k_1 j_1 j_2} = g_{k_1 i_1} F_{j_1 j_2}^{i_1}, \quad (0,3). \quad (\text{A.15})$$

Formes

Une p -forme est un tenseur covariant $(0,p)$ complètement antisymétrique ($w_{\Pi(i_1)\dots\Pi(i_p)} = (-1)^\Pi w_{i_1\dots i_p}$) s'écrivant, dans une base $\{dx^i\}$,

$$w = \frac{1}{p!} w_{i_1\dots i_p} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} \quad (\text{A.16})$$

L'ensemble des p -formes est noté Λ^p .

Produit extérieur. Soit $a \in \Lambda^p$ et $b \in \Lambda^q$. Alors $a \wedge b \in \Lambda^{p+q}$, est défini par

$$a \wedge b = \frac{1}{p!q!} a_{\alpha_1\dots\alpha_p} b_{\beta_1\dots\beta_q} dx^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge dx^{\alpha_p} \wedge dx^{\beta_1} \wedge \dots \wedge dx^{\beta_q}, \quad (\text{A.17})$$

avec les propriétés

1. Associativité : $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$.
2. Linéarité : $(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2) \wedge b = \alpha_1 a_1 \wedge b + \alpha_2 a_2 \wedge b$
3. $a \wedge b = (-1)^{pq} b \wedge a$

Dérivée extérieure. Dérivée extérieure $d : \Lambda^p \rightarrow \Lambda^{p+1}$, définie par

$$da = \frac{1}{p!} \partial_a a_{\alpha_1\dots\alpha_p} dx^\alpha \wedge dx^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge dx^{\alpha_p}. \quad (\text{A.18})$$

Si $w \in \Lambda^0$ (scalaire), alors dw correspond au gradient. Si $a \in \Lambda^1$, alors da correspond au rotationnel.

Propriétés :

$$d(a \wedge b) = da \wedge b + (-1)^p a \wedge db, \quad (\text{A.19})$$

$$d^2 a = 0. \quad (\text{A.20})$$

qui généralise $\text{rot } \nabla \phi = 0$.

Théorème de Stokes. Soit $a \in \Lambda^p$ et V un domaine de $\mathbb{R}^{p+1}$. Alors

$$\int_V da = \int_{\partial V} a, \quad (\text{A.21})$$

avec ∂V le bord de V . Dans cette formule, il faut voir $dx^1 \wedge \dots \wedge dx^p$ comme un élément de volume habituel.

Ex : Soit $a = a_i dx^i$.

$$da = \sum_{i < j} \underbrace{(\partial_i a_j - \partial_j a_i)}_{(\text{rot } a)_k \epsilon_{ijk}} dx^i \wedge dx^j. \quad (\text{A.22})$$

Ainsi

$$\int_V \text{rot } a d\sigma = \int_{\partial V} a ds. \quad (\text{A.23})$$

Dualité, l'opération * de Hodge. Soit $g_{\alpha\beta}$ une métrique $g = \det g_{\alpha\beta}$. $*$: $\Lambda^p \rightarrow \Lambda^{n-p}$, telle que

$$*w \doteq \frac{\sqrt{g}}{(n-p)!p!} w^{\alpha_1 \dots \alpha_p} \epsilon_{\alpha_1 \dots \alpha_p \alpha_{p+1} \dots \alpha_n} dx^{\alpha_{p+1}} \wedge \dots \wedge dx^{\alpha_n}, \quad (\text{A.24})$$

avec

$$w^{\alpha_1 \dots \alpha_p} = g^{\alpha_1 \beta_1} \dots g^{\alpha_p \beta_p} w_{\beta_1 \dots \beta_p}, \quad (\text{A.25})$$

et $\epsilon_{1\dots n} = 1$, $\epsilon_{\Pi(1)\dots\Pi(n)} = (-1)^\Pi \epsilon_{1\dots n}$, $\epsilon_{\alpha_1 \dots \alpha_n} = 0$ si deux indices coïncident.

Annexe B

Exercices

Série 1

Exercice 1 - Transformation de Lorentz

Montrer que les seules transformations $x \mapsto x'(x)$ non singulières (c'est-à-dire pour lesquelles la matrice $\{\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}\}$ est inversible) de $\mathbb{R}^4$ qui laissent la métrique $ds^2 \doteq \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ invariante sont celles de Lorentz-Poincaré.

Rappel:

Les transformations de Lorentz sont définies par $(\Lambda, a) : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$, $x \mapsto x'(x)$, où $x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu$, avec Λ défini par $\eta = \Lambda^T \eta \Lambda$ et $a \in \mathbb{R}^4$.

Exercice 2 - Vecteur temporel

Soit un vecteur de type temporel ($\langle v, v \rangle \doteq \eta_{\mu\nu} v^\mu v^\nu > 0$). Montrer qu'il existe une transformation de Lorentz L telle que $L^\mu_\nu v^\nu = \sqrt{\langle v, v \rangle} \delta_{\mu,0}$.

Série 2

Exercice 3 - Temps propre

Une horloge atomique est embarquée sur un avion à grande vitesse. Celui-ci effectue une rotation autour de la Terre, au niveau de l'équateur. Après avoir effectué un tour complet, on compare la montre à une montre de "référence" restée au sol.

Déterminer l'écart de temps observé, en distinguant le cas où l'avion

vole en direction de l'est de celui où il vole en direction de l'ouest. Développer au premier ordre en $\frac{v}{c}$, où v représente une vitesse. Discuter la validité de cette approximation.

Faire l'étude dans le cadre de la relativité restreinte (négliger les effets de la gravité).

Indication:

Les horloges indiquent leur temps propre.

Application numérique:

Hauteur de vol	:	9 km
Vitesse relative de l'avion (par rapport à la Terre)	:	250 m · s ⁻¹
Rayon de la Terre	:	6738 km
Vitesse de la lumière	:	3 · 10 ⁸ m · s ⁻¹

Exercice 4 - $\hbar$ est un scalaire

Soit un photon (masse $m = 0$). Supposons que son énergie soit reliée à sa fréquence par une relation linéaire : $E = \hbar\omega$. Montrer que la constante $\hbar$ (constante de Planck) est un scalaire, c'est-à-dire qu'elle ne dépend pas du référentiel inertiel dans lequel on la mesure.

Indication:

Utiliser l'effet Doppler.

Exercice 5 - Effet Doppler

A quelle vitesse faut-il rouler pour qu'un feu rouge apparaisse vert ?

Indication:

Les longueurs d'onde associées aux couleurs rouge et verte sont $\lambda_{\text{rouge}} \approx 7 \cdot 10^{-5}$ cm et $\lambda_{\text{vert}} \approx 5 \cdot 10^{-5}$ cm respectivement.

Série 3

Exercice 6 - Transformation de E et H

Soient $F_{\mu\nu}$ les composantes du tenseur électromagnétique F , qui contient les champs E et H . Il est totalement antisymétrique, défini par

$$F_{i0} = E_i, \quad F_{ij} = \epsilon_{ijk} H_k,$$

où ϵ_{ijk} est totalement antisymétrique, avec $\epsilon_{123} = 1$.

Soient $F'_{\mu'\nu'}$ les composantes de F dans un référentiel $\mathcal{R}'$ de vitesse v dans la direction 1 par rapport à $\mathcal{R}$. Elles sont reliées à $F_{\mu\nu}$ par

$$F'_{\mu'\nu'} = (\Lambda^{-1})_{\mu'}^{\mu} (\Lambda^{-1})_{\nu'}^{\nu} F_{\mu\nu}$$

où Λ est un boost dans la direction 1 :

$$\begin{aligned} (\Lambda^{-1})_{\mu}^{\nu} = & \cosh(\eta) [\delta_{\mu}^0 \delta_0^{\nu} + \delta_{\mu}^1 \delta_1^{\nu}] \\ & + \sinh(\eta) [\delta_{\mu}^0 \delta_1^{\nu} + \delta_{\mu}^1 \delta_0^{\nu}] + \delta_{\mu}^2 \delta_2^{\nu} + \delta_{\mu}^3 \delta_3^{\nu}. \end{aligned}$$

1. Comment se transforment les champs électrique et magnétique ?
2. Un champ magnétique nul dans le référentiel $\mathcal{R}$ est non nul dans le référentiel $\mathcal{R}'$. Interpréter ce résultat.
3. Donner la loi de transformation de ces champs au plus bas ordre en $\frac{v}{c}$.

Exercice 7 - Invariants

Soit $F(E, H)$ le tenseur électromagnétique défini à l'exercice précédent.

1. Exprimer le scalaire $\frac{1}{2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ en fonction de E et H .
2. Montrer que $*F(E, H) = F(-H, E)$.
3. Exprimer $\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{*\mu\nu}$ en fonction de E et H , où $F^{*\mu\nu}$ sont les composantes du tenseur $*F$. Voir que cette grandeur est un scalaire pour les transformations de Lorentz orthochrones propres Λ (pour lesquelles $\det \Lambda = +1$).

Série 4

Exercice 8 - Transformations de Lorentz pures (boosts)

Soit une transformation linéaire $\Lambda(v) : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$, $x \mapsto x'(x)$, telle que $x'^{\mu} = \Lambda(v)^{\mu}_{\nu} x^{\nu}$, et $v \in \mathbb{R}^3$.

Les composantes de $\Lambda(v)$ sont définies par (on écrit $\Lambda^{\alpha}_{\beta} = \Lambda_{\alpha\beta}$)

$$\Lambda_{00} = \gamma(v), \quad \Lambda_{0i} = \Lambda_{i0} = \gamma(v) \frac{v^i}{c}, \quad \gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

et

$$\Lambda_{ij} = \Lambda_{ji} = \delta_{ij} + \frac{v^i v^j}{v^2} (\gamma(v) - 1).$$

1. Montrer que $\Lambda(v)$ est une transformation de Lorentz, c'est-à-dire qu'elle vérifie $\Lambda^T(v)\eta\Lambda(v) = \eta$.
2. Calculer $x'(x)$ au plus bas ordre en $\frac{v^i}{c}$, $i = 1, 2, 3$. Dédurre de ce résultat la nature de cette transformation de Lorentz.
3. Montrer qu'il s'agit d'un boost de vitesse v .

Indication:

Récrire la transformation de Lorentz ainsi : $\Lambda(v) = R^{-1}BR$, où R est une rotation qui amène v sur e_1 , et B est un boost dans la direction e_1 .

Exercice 9 - Propriété de $T_{\mu\nu}$

Soit le tenseur énergie-impulsion du champ électromagnétique défini par

$$T_{\alpha\beta}^{\text{EM}} = -F_{\alpha\gamma}F_{\beta}^{\gamma} + \frac{1}{4}\eta_{\alpha\beta}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}.$$

1. Montrer que pour tout vecteur u temporel (c'est-à-dire un vecteur tel que $u_{\mu}u^{\mu} > 0$) on a

$$T_{\mu\nu}^{\text{EM}}u^{\mu}u^{\nu} > 0.$$

2. Interpréter cette grandeur.
3. Soit le tenseur énergie-impulsion du fluide parfait

$$T_{\alpha\beta}^{\text{FP}} = \left(\rho + \frac{p}{c^2}\right)u_{\alpha}u_{\beta} - p\eta_{\alpha\beta}.$$

Etablir un résultat similaire.

Indication:

Trouver un changement de référentiel dans lequel $T_{\mu\nu}u^{\mu}u^{\nu}$ s'exprime $T'_{00}u'^0u'^0$.

Série 5

Exercice 10 - Hyperboloïde H^2

Soit l'hyperboloïde H^2 définie comme surface dans $\mathbb{R}^{2,1}$ par $H^2 \doteq \{x = (x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3 \mid -(x^1)^2 - (x^2)^2 + (x^3)^2 = 1, \quad x^3 > 0\}$.

1. Ecrire une paramétrisation de l'hyperboloïde par analogie avec la paramétrisation en coordonnées sphériques de la sphère S^2 .
2. La métrique de $\mathbb{R}^{2,1}$ est $(ds)^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 - (dx^3)^2$. Déterminer la métrique induite sur H^2 .

Soit $S = (0, 0, -1) \in \mathbb{R}^3$. On définit h_S la projection stéréographique de centre S de la manière suivante : soit $x \in H^2$ et d la droite passant par x et S . Alors $y = h_S(x) \doteq d \cap \pi_0$, où $\pi_0 \doteq \{(x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3 | x^3 = 0\}$.

3. Déterminer cette nouvelle paramétrisation en fonction de la précédente. Déterminer le domaine de $\mathbb{R}^2$ dans lequel H^2 est envoyé.

Indication:

Exprimer y en coordonnées polaires (r, φ) .

4. Déterminer la métrique induite dans cette paramétrisation.
5. Montrer que la métrique induite est définie positive sur H^2 .

Exercice 11 - Géodésiques

Soit une variété à deux dimensions munie, relativement à une certaine carte, d'une métrique conforme, c'est-à-dire une métrique qui s'écrit $g_{ij}(x)dx^i dx^j = f(x)((dx^1)^2 + (dx^2)^2)$. (Pour toute variété riemannienne à deux dimensions, on peut trouver localement une carte telle que la métrique soit conforme).

Soit le lagrangien $L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}g_{ij}(x)\dot{x}^i \dot{x}^j = \frac{1}{2}f(x)((\dot{x}^1)^2 + (\dot{x}^2)^2)$.

1. Déterminer les équations des géodésiques, c'est-à-dire les équations des courbes $x(t)$ sur la variété qui extrémisent l'action $S[x] = \int L(x(t), \dot{x}(t))dt$.
2. Les équations des géodésiques s'écrivent

$$\frac{d^2 x^k}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^2 \Gamma_{ij}^k \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} = 0, \quad k = 1, 2,$$

où les Γ_{ij}^k sont les symboles de Christoffel.

Déterminer ces coefficients.

3. Calculer ces coefficients à l'aide de la formule générale :

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}g^{kl} \left\{ \frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{li}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right\}.$$

Comparer le résultat.

Série 6

Exercice 12 - Métrique conforme - sphère S^2 , hyperboloïde H^2

Considérer la variété de l'exercice précédent, c'est-à-dire la variété munie, relativement à la carte considérée, d'une métrique conforme.

1. Considérer le cas où $f(x) = f(r)$, avec $r = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2}$. Établir l'équation des géodésiques dans ce cas.
Indication:
 Identifier les constantes du mouvement.
2. Considérer le cas où $f(r) = \frac{1}{c(1+\sigma r^2)^2}$, c est une constante, et $\sigma = \pm 1$.
 - (a) Le cas où $\sigma = +1$ correspond à la sphère S^2 munie de la métrique induite de $\mathbb{R}^3$, avec comme carte la projection stéréographique. Déterminer les géodésiques en résolvant l'équation établie au point 1. Peut-on interpréter ce résultat ?
Indication:
 Récrire la courbe dans les coordonnées sphériques.
 - (b) Le cas où $\sigma = -1$ correspond à l'hyperboloïde H^2 muni de la métrique induite de l'espace de Minkowski $\mathbb{R}^{2,1}$. Quelle est l'allure des géodésiques dans ce cas ?
3. Considérer le demi-plan de Poincaré, défini par $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y \geq 0\}$, muni de la métrique conforme $\frac{1}{y^2} \{dx^2 + dy^2\}$. Déterminer et résoudre l'équation des géodésiques dans ce cas. Donner l'allure de ces géodésiques.

Série 7

Exercice 13 - Courbure d'une variété à deux dimensions

Considérer une variété riemannienne à deux dimensions.

1. Montrer que le tenseur des courbures est entièrement défini par R_{1212} .
Indication:
 Identifier les symétries de $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ en les indices.
2. Déterminer les composantes du tenseur de Ricci $R_{\alpha\beta} \doteq R^\gamma_{\alpha\gamma\beta}$.
3. Déterminer la courbure scalaire $R \doteq g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}$.

Considérer le cas d'une métrique conforme $g_{\alpha\beta} = f(x)\delta_{\alpha\beta}$.

4. Déterminer la courbure scalaire dans ce cas.
5. Supposons que cette courbure scalaire soit constante, c'est-à-dire indépendante de x . On aboutit alors à une équation pour f . Déterminer cette équation.
6. Considérer les trois exemples de la série précédente : la sphère S^2 , l'hyperboloïde H^2 , le demi-plan de Poincaré. Calculer leur courbure scalaire.

Exercice 14 - Courbure du cylindre

Considérer un cylindre plongé dans l'espace à trois dimensions, défini par $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 = 1\}$. Considérer les paramétrisations $\{(\theta, z) | x = \cos \theta, y = \sin \theta, z = z\}$ (coordonnées cylindriques) et $\{(x, z) | x = x, y = \sqrt{1 - x^2}, z = z\}$. La dernière paramétrisation est valable pour $y \geq \epsilon > 0$.

1. Déterminer la métrique induite de $\mathbb{R}^3$ (relativement aux deux cartes).
2. Calculer R_{1212} puis la courbure scalaire en utilisant le résultat de l'exercice précédent (relativement aux deux cartes).
3. Ce résultat est-il surprenant ?

Série 8

Exercice 15 - Déviation géodésique

1. Considérer $\mathbb{R}^3$. Voir que les droites de vitesse 1 sont des géodésiques. Déterminer la distance entre deux géodésiques de conditions initiales voisines en fonction du temps.
2. Considérer la sphère S^2 . Les grands cercles sont des géodésiques. Se placer dans un système de coordonnées sphériques tel que la géodésique considérée se trouve sur un méridien (voir que cela est possible pour toute géodésique). Considérer une géodésique de condition initiale parallèle à la première et calculer la distance entre ces deux géodésiques au cours du temps.

Indication:

Construire la deuxième géodésique à partir de la première par une rotation.

3. Considérer l'hyperboloïde H^2 muni de la métrique induite de $\mathbb{R}^{2,1}$. Voir que la courbe $(\sinh(t), 0, \cosh(t))$ est une géodésique.

Rappel:

dans la projection stéréographique les diamètres sont des géodésiques.

Considérer une géodésique de condition initiale parallèle à la première et calculer la distance entre ces deux géodésiques au cours du temps.

Indication:

Voir que les transformations de Lorentz laissent la métrique invariante. Construire la deuxième géodésique à partir de la première par une transformation de Lorentz.

Exercice 16 - Equation de déviation des géodésiques

Considérer deux géodésiques $x(t)$ et $\tilde{x}(t)$ sur une variété, ayant des conditions initiales proches. Dans l'approximation linéaire l'évolution de l'écart $\delta x(t) \doteq \tilde{x}(t) - x(t)$ est donnée par

$$\nabla_{\dot{x}}^2 \delta x^\alpha + R^\alpha_{\beta\gamma\delta}(x) \dot{x}^\beta \delta x^\gamma \dot{x}^\delta = 0,$$

où $R^\alpha_{\beta\gamma\delta}(x)$ sont les composantes du tenseur des courbures de la variété.

On appelle cette équation l'équation de la déviation géodésique.

1. Ecrire cette équation dans le cas d'une variété à deux dimensions.
2. Considérer que les deux géodésiques sont parallèles, donc $g_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \delta x^\beta = 0$. Ecrire l'équation de la déviation géodésique dans ce cas.
3. La distance entre ces deux géodésiques est $\Delta \doteq \sqrt{g_{\alpha\beta} \delta x^\alpha \delta x^\beta}$. Déterminer l'équation d'évolution de Δ pour le cas ci-dessus.
Indication:
Se placer en coordonnées localement cartésiennes. En déduire un résultat valable pour n'importe quel choix de coordonnées.
4. Considérer le cas où la courbure est constante. Résoudre l'équation pour Δ dans ce cas. Discuter le comportement en fonction du signe de la courbure.
5. Donner une interprétation physique à cette équation.

Série 9

Exercice 17 - Deuxième identité de Bianchi

Considérer une variété riemannienne munie de la connection de Levi-Civita.

1. Exprimer $R_{\alpha\beta\gamma\delta}(x)$ dans les coordonnées géodésiques au point x .
2. Exprimer $\nabla_\epsilon R_{\alpha\beta\gamma\delta}(x)$ dans ces coordonnées.
3. Etablir la deuxième identité de Bianchi en x :

$$\nabla_\epsilon R_{\alpha\beta\gamma\delta}(x) + \nabla_\gamma R_{\alpha\beta\delta\epsilon}(x) + \nabla_\delta R_{\alpha\beta\epsilon\gamma}(x) = 0.$$

4. En déduire que cette identité est valable sur toute la variété considérée.

Démontrer ce résultat sans passer par les composantes (c'est-à-dire sans passer par une carte), soit

$$(\nabla_X R)(Y, Z)V + (\nabla_Y R)(Z, X)V + (\nabla_Z R)(X, Y)V = 0,$$

où $X, Y, Z, V \in \chi(M)$ sont des champs de vecteurs sur la variété M .

Indication:

Utiliser le fait que la torsion est nulle, la règle de Leibniz et l'identité de Jacobi.

Série 10

Exercice 18 - Ondes gravitationnelles

Considérer les équations d'Einstein dans le vide (de matière et de champ électromagnétique, c'est-à-dire $T_{\mu\nu} = 0$) :

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 0.$$

Considérer une métrique de la forme

$$(ds)^2 = (dt)^2 - (dx^1)^2 - f^2(t - x^1)(dx^2)^2 - g^2(t - x^1)(dx^3)^2,$$

où f et g sont des fonctions réelles.

1. Effectuer le changement de variables

$$(t, x^1, x^2, x^3) \mapsto (u, v, x^2, x^3) \doteq (t - x^1, t + x^1, x^2, x^3)$$

et exprimer la métrique dans ces coordonnées.

2. Déterminer les symboles de Riemann-Christoffel (identifier auparavant les composantes nulles).
3. Déterminer le tenseur des courbures, le tenseur de Ricci et la courbure scalaire (identifier auparavant les composantes nulles).
4. Etablir que les équations d'Einstein sont (il n'y a plus qu'une équation)

$$\frac{f''}{f} + \frac{g''}{g} = 0.$$

5. Donner une interprétation physique à ces solutions.
6. Poser $\frac{f''}{f} = k > 0$. Résoudre les équations d'Einstein explicitement. La solution est-elle physiquement acceptable ?

Série 11

Exercice 19 - Courbure et ondes gravitationnelles

1. Soient les équations d'Einstein dans le vide :

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 0.$$

Montrer que toute solution des équations d'Einstein est telle que la courbure scalaire et le tenseur de Ricci sont nuls. Peut-on en déduire que l'espace-temps est plat ?

Indication:

Montrer d'abord que la courbure scalaire est nulle.

2. Considérer les équations d'Einstein dans le vide linéarisées, en introduisant la métrique $g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + \epsilon h_{\mu\nu}(x)$, $\epsilon \ll 1$, et en développant au premier ordre en ϵ . Dans un choix de carte particulier (choix de jauge, $\partial_\mu h^\mu{}_\nu = \frac{1}{2}\partial_\nu h$), les équations d'Einstein s'écrivent

$$\square h_{\mu\nu}(x) = 0.$$

Considérer la solution $h_{23} = h_{32} = A \sin\{\omega(t-x)\}$, $h_{\mu\nu} = 0$ sinon. A et ω sont des constantes.

- Vérifier que $h_{\mu\nu}(x)$ est bien solution des équations d'Einstein linéarisées.
- Vérifier que cette solution satisfait la condition de jauge.
- Déterminer le tenseur des courbures. Peut-on s'attendre à ce qu'il soit nul ?

Indication:

Le tenseur des courbures est (voir cours)

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{2}\epsilon \left\{ \partial_{\beta\gamma}^2 h_{\alpha\delta} + \partial_{\alpha\delta}^2 h_{\beta\gamma} - \partial_{\beta\delta}^2 h_{\alpha\gamma} - \partial_{\alpha\gamma}^2 h_{\beta\delta} \right\}.$$

Exercice 20 - Unités géométriques

Pour mettre en évidence l'ordre de grandeur des effets de la gravitation, considérer les unités géométriques, définies en imposant

$$G = 1, c = 1$$

dans ce système d'unités. Cela permet de tout exprimer en $[m]^n$.

1. Convertir dans ces unités les grandeurs suivantes :

$$c = 2.998 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$G = 6.673 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$M_{\text{Soleil}} = 1.989 \cdot 10^{30} \text{ kg}$$

$$M_{\text{Terre}} = 5.973 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

2. Déterminer dans ces unités la valeur du potentiel newtonien ($\phi(r) = -\frac{GM}{r}$) dû au Soleil
 - (a) à la surface du Soleil,
 - (b) ressenti sur Terre.
3. Déterminer dans ces unités la valeur du potentiel newtonien dû à la Terre à la surface de la Terre.
4. Comparer les potentiels dûs au Soleil et à la Terre, à la surface de la Terre. Lequel ressent-on le plus fortement ?
5. Dans ces unités, $\hbar^{1/2}$ est une distance. Déterminer cette distance dans les unités géométriques, dont on suppose que l'ordre de grandeur est caractéristique de la gravitation quantique.

Application numérique:

Rayon du Soleil	:	$6.960 \cdot 10^8 \text{ m}$
Distance Terre-Soleil	:	$1.496 \cdot 10^{11} \text{ m}$
Rayon de la Terre	:	$6.738 \cdot 10^6 \text{ m}$
$\hbar$	:	$1.055 \cdot 10^{-34} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$

Série 12

Exercice 21 - Vitesse d'échappement

Depuis la Terre un expérimentateur envoie un projectile au-dessus de lui (trajectoire radiale), avec vitesse initiale v . La trajectoire est telle que la vitesse à l'infini est nulle. v est appelée la vitesse d'échappement. Dans le cas relativiste on considère la métrique de Schwarzschild :

$$(ds)^2 = \left(1 - \frac{2MG}{c^2 r}\right) c^2 (dt)^2 - \left(1 - \frac{2MG}{c^2 r}\right)^{-1} (dr)^2 - r^2 ((d\theta)^2 \sin^2 \theta (d\phi)^2).$$

1. Dans le cas non relativiste, déterminer v .
2. Dans le cas relativiste, déterminer les constantes du mouvement, ainsi que leurs valeurs.
3. Ecrire les équations du mouvement pour $(t(\tau), r(\tau))$.
4. Déterminer la vitesse v dans le cas relativiste. Cette vitesse est celle mesurée par un observateur immobile, situé à la surface de la Terre.

Application numérique:

Constante de gravitation G	:	$6.673 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$
Vitesse de la lumière c	:	$2.998 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
Rayon de la Terre	:	6738 km
Masse de la Terre M_{Terre}	:	$5.973 \cdot 10^{24} \text{ kg}$

Exercice 22 - Diffusion d'un photon

Dans le cadre newtonien, supposer que le photon est une particule de masse m infinitésimale. Déterminer l'angle de déviation d'un photon par un corps sphérique de masse M . Le photon évolue à la vitesse de la lumière à l'infini.

Appliquer ce résultat au Soleil, avec un paramètre d'impact $b = 10^{10} \text{ m}$. Effectuer un développement limité (identifier un petit paramètre sans dimension).

Indication:

Utiliser la conservation de l'énergie et du moment cinétique.

Application numérique:

Constante de gravitation G	:	$6.673 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$
Vitesse de la lumière c	:	$2.998 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
Masse du Soleil M_{Soleil}	:	$1.989 \cdot 10^{30} \text{ kg}$

Série 13

Exercice 23 - Global Positioning System (GPS)

Pour déterminer la position d'un récepteur GPS, les satellites du système GPS envoient des signaux (électromagnétiques) à ce récepteur, qui contiennent comme information leur position et le temps au moment de l'envoi du signal.

1. Considérer le cas d'un espace de Minkowski (relativité restreinte), avec deux satellites GPS (A et B), et un récepteur (R). Le récepteur reçoit simultanément les informations (t_A, x_A) et (t_B, x_B) . Déterminer sa position (t_R, x_R) en fonction de ces informations.
2. Dans le cas d'un espace-temps à quatre dimensions, combien de satellites sont nécessaires pour déterminer la position du récepteur ? Et pour déterminer, en plus, le temps ?

Considérons la Terre, créant une métrique de Schwarzschild :

$$(ds)^2 = \left(1 - \frac{2MG}{c^2 r}\right) c^2 (dt)^2 - \left(1 - \frac{2MG}{c^2 r}\right)^{-1} (dr)^2 - r^2 ((d\theta)^2 + \sin^2 \theta (d\phi)^2).$$

Un récepteur est situé sur l'équateur, ainsi qu'un satellite GPS (S) évoluant sur une orbite circulaire, au-dessus de l'équateur. Le temps que mesure le satellite est celui d'une horloge atomique embarquée (temps propre, $\Delta\tau_S$).

3. Déterminer la différence entre les temps affichés par l'horloge du satellite et une horloge sur Terre ($\Delta\tau_R$), rapportée à la valeur mesurée sur Terre (effectuer un développement limité) :

$$\frac{\Delta\tau_R - \Delta\tau_S}{\Delta\tau_R}.$$

4. Séparer les contributions dues à la relativité restreinte et à la relativité générale et déterminer leurs valeurs numériques. Quelle correction est la plus importante ?
5. Ramener ces corrections en mètres. On impose une précision de deux mètres. Si on ne tient pas compte des corrections relativistes, après combien de temps l'erreur est-elle trop importante ? Après un jour, combien de mètres d'erreur mesure-t-on ?

Application numérique:

Constante de gravitation	: $G = 6.7 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$
Masse de la Terre	: $M_{\text{Terre}} = 6.0 \cdot 10^{24} \text{ kg}$
Position du récepteur	: $R_R = 6.7 \cdot 10^3 \text{ km}$
Position du satellite	: $R_S = 2.7 \cdot 10^4 \text{ km}$
Vitesse du satellite	: $3.9 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$
Vitesse de la lumière	: $3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

Série 14

Exercice 24 - Unités de Planck

Les unités de Planck (aussi dites unités naturelles) sont obtenues en posant $c = G = \hbar = k_B = 1$. Elles permettent d'exprimer toute grandeur contenant des dimensions de temps, de distance, de masse, et de Kelvin en des grandeurs sans dimensions.

Dans ces unités, exprimer la masse de la Terre, du Soleil, le diamètre de la voie lactée (10^6 années lumière), votre âge, et la température ambiante (22°C).

Application numérique:

$$c = 2.998 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\hbar = 1.055 \cdot 10^{-34} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$$

$$G = 6.674 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$k_B = 1.381 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$$

$$M_{\text{Soleil}} = 1.989 \cdot 10^{30} \text{ kg}$$

$$M_{\text{Terre}} = 5.973 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$